Partie I

MR, MESSIRDI BACHIR " Enseignant aux département de Mathématiques- Faculté des sciences- Université de TLEMCEN".Cours pour les étudiants"ST-SM-MI-GBM-ARCH-Ecoles préparatoires..."ALLAHOMA IDJALHOU FI MIZANE HASSANATE ALAB RAHIMAHO ALLAH

Partie II

[redacted]

[redacted]

Partie III

Table des Matières

Chapitre 1

Logique élémentaire- Quelques types des raisonnements-Théorie des ensembles

1.1 LOGIQUE

Vous savez par expérience qu'un cours de mathématiques est constitué d'une suite d'énoncés, appelés définitions ou propositions. Les définitions sont posées a priori et les propositions doivent être démontrées à l'aide de définitions ou d'autres propositions déja établies. C'est cette démarche, qui consiste à passer avec logique, les différentes étapes d'un raisonnement mathématique. Il nous a cependant paru utile de dégager quelques règles de logique universelle.

1.1.1 PROPOSITIONS

Une proposition un énoncé (une assertion) dont on peut affirmer sans ambiguïté s'il est vrai ou faux. Par exemple 2 $>$1 est une proposition vraie; $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, est une proposition fausse; mais $A \subset B$ n'est pas une proposition car on n'a pas des données sur les deux ensembles A et B.

Par suite on note une proposition vraie par "V" ou "1", et une proposition fausse par "F" ou "0".

1.1.2 NÉGATION D'UNE PROPOSITION

Si P est une proposition, on note la négation de P par non P ou $\bar{P}$, qui est vraie si P est fausse et fausse si P est vraie.

1.1.3 CONNECTEURS LOGIQUES

À deux propositions P et Q, on peut associer une troisième, qui est définit par un connecteur logique entre ces deux propositions.

Conjonction

On appelle **conjonction** de deux propositions P et Q, la proposition notée $P \wedge Q$ qui est vraie, si P et Q sont vraies et fausse dans les autres cas. Deux propostions sont **incompatibles**, si leur conjonction est fausse.

Disjonction

Une **disjonction** de deux propositions, est noté par $P \vee Q$, et elle est vraie si l'un des deux est vraie.

Implication

L'implication de deux propositions P et Q, est la proposition (non P) ou Q, notée $P \Rightarrow Q$ (qui se lit P implique Q), qui est fausse dans le seul cas où P est vraie et Q est fausse.

Équivalence

Deux propositions sont dites **équivalentes**, ce qu'on note $P \iff Q$, si elles sont toutes les deux vraies, ou toutes les deux fausses. En examinant la proposition $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$.

Ces formules sont réduits dans le tableau suivant:

P	Q	$\bar{P}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

1.1.4 LES QUANTIFICATEURS

Soit un ensemble E et une propriété déterminée P. On peut se poser les deux questions suivantes:

a) Existe-t-il des éléments de E qui possèdent cette propriété?

b) Dans l'affirmative, la propriété appartient-elle à tous les éléments?

Pour formuler les réponses à ces deux questions on introduit deux symboles appelés **quantificateurs**. Ce sont:

Quantificateur existentiel

Il s'écrit $\exists$ et signifie: il existe au moins un élément de E ayant la propriété P. Par exemple l'écriture

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que: } x^2 + x - 2 = 0$$

signifie qu'il existe au moins un nombre réel tel que: $x^2 + x - 2 = 0$.

Quantificateur universel

Qui s'écrit $\forall$ et signifie que tout élément de E vérifie P. Par exemple l'écriture

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ tel que: } x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

signifie que pour tout nombre réel vérifie l'identité écrite.

Définition 1.1 *Une **tautologie** est une proposition qui est vraie dans tous les cas.*

Exemple 1.1 *Vérifier que la proposition:*

$$(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$$

est une tautologie.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1	**1**
1	0	0	1	**1**
0	1	1	0	**1**
0	0	1	1	**1**

1.2 QUELQUES TYPES DES RAISONNEMENTS

Il est important de trouver un moyen ou une méthode pour répondre à un certain problème, pour cela on s'inspire à quelques techniques ou raisonnements.

1.2.1 LE RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

généralement, la recherche d'une réponse à un problème s'apuie sur les hypothèses donnés ou les théorèmes connus, mais parfois le chemin direct est difficille à vérifier. On s'inspire donc sur le raisonnement par l'absurde, qui propose que la négation du problème voulu est vraie, et par suite on arrive à une contradiction avec les hypothèses donnés, ou l'un des théorèmes connus, ou bien l'un des axiomes.... C'est à dire qu'on a proposer est fausse, ce qui affirme que le problème voulu est vraie. Autrement dit:

$$(P \Rightarrow Q) \Longleftrightarrow \left(\bar{Q} \Rightarrow \text{ une contradiction}\right).$$

Exemple 1.2 *Montrons que:*

$$n^2 \textit{ est pair} \Rightarrow n \textit{ est pair}$$

par l'absurde supposons que:

$$\begin{aligned} n \text{ n'est pas pair} &\Rightarrow n \text{ est impair} \Rightarrow n = 2k+1 \\ &\Rightarrow n^2 = 2\left(2k^2+2k\right)+1 \\ &= 2p+1 \\ &\Rightarrow n^2 \text{ est impair, contradiction avec l'hypothèse.} \\ &\Rightarrow \text{ ce qu'on a proposer est fausse} \\ &\Rightarrow n \text{ est pair.} \end{aligned}$$

1.2.2 LE CONTRAPOSÉE

On appelle **contraposée** d'une implication $P \Rightarrow Q$ l'implication (non $Q \Rightarrow$ non P). Autrement dit si on a non Q implique non P, alors par hypothèse on a P, c'est-à-dire, on a pas non Q, alors on a Q.

Exemple 1.3 *Montrons que:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \neq y \Rightarrow 3x+2 \neq 3y+2$$

En effet:

$$3x+2 = 3y+2 \Rightarrow x = y \quad \text{c'est le contraposée.}$$

1.2.3 LE RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

On utilise le raisonnement par récurrence dans le cas d'une relation ou formule qui depend d'un indice $n \in \mathbb{N}$. Alors pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à un entier n_0, on vérifie qu'elle est héridìtaire (c'est-à-dire que si elle est vraie pour un entier quelconque, alors elle est vraie pour son suivant). Il suffit alors qu'elle soit vraie pour l'entier n_0 pour en déduire qu'elle est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à un entier n_0.

Exemple 1 *Montrons que quel que soit l'entier naturel n, l'entier $3^{2n} - 2^n$ est divisible par $7.(R_n)$*

Par récurrence montrons que (R_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 0$, $3^0 - 2^0 = 0 = 0.7 \Rightarrow 3^0 - 2^0$ *est divisible par* $7. \Rightarrow R_0$ *est vraie.*

Supposons que (R_n) *est vraie (l'hypothèse de récurrence), et montrons que* (R_{n+1}) *l'est aussi, c'est-à-dire:*

$$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} \text{ est divisible par} 7.$$

En effet:

$$\begin{aligned}
3^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 2.\left(3^{2n} - 2^n\right) + 7.3^{2n} \\
&= 2.7.k + 7.3^{2n} \text{ (l'hypothèse de récurrence)} \\
&= 7\left(2.k + 3^{2n}\right) = 7.k' \\
&\Rightarrow 3^{2(n+1)} - 2^{n+1} \text{ est divisible par} 7.
\end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 3^{2n} - 2^n \text{ est divisible par } 7.$$

1.3 THÉORIE DES ENSEMBLES

Un ensemble est constiué d'objets matériels, ou de phénomènes, ou de signes, ou d'identités abstraites, rassemblés en vertu d'une propriété commune.

Un ensemble est une entité d'une nature différente de celle des éléments qui le composent: un ensemble de points n'est pas un point, même s'il ne contient qu'un point.

Certains ensembles particulièrement importants sont désignés par des lettres déterminées. Signalons:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}; \\
\mathbb{Z} &= \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\};
\end{aligned}$$

$\mathbb{Q}$, ensemble des nombres rationnels: fractions positives ou négatives;

$\mathbb{R}$, ensemble des nombres réels;

$\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes.

D'une autre façon on peut désigner un ensemble ou une partie en précisant les propriétés particulières P vérifiées par un élément x de cette partie, par exemple:

$$\{x, x \in \mathbb{R}; 1 \leq x \leq 5\}$$

VOCABULAIRES ET NOTATIONS:

Si a est un élément de l'ensemble E, on écrit $a \in E$, on énonce " a élément de E " ou encore " a appartient à E ". La négation de l'énoncé précédent se note $a \notin E$. Notons qu'un ensemble qui ne contient aucun élément est dit l'ensemble vide, noté: $\varnothing$.

1.3.1 Inclusion-sous ensemble

Soient E, F deux ensemble. Si tous les éléments d'un ensemble E appartiennent à un ensemble F on dit que E est inclus dans F, ou bien E est un sous ensemble de F.

Exemple 1.4 $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

Exemple 1.5 $\varnothing \subset E$, *avec* E *est un ensemble quelconque.*

Preuve: *Soit* $a \in \varnothing \Rightarrow a \in E$ *est vraie car la première proposition est fausse, ce qui affirme que l'implication est vraie.*

1.3.2 Egalité de deux ensembles

Soient E, F deux ensemble. Pour montrer que $E = F$, on montre que $E \subset F$ et $F \subset E$.

1.3.3 Ensemble des parties

On appelle **ensemble des parties** d'un ensemble E, et l'on désigne par $p(E)$, l'ensemble dont les éléments sont les parties de E. On a $\varnothing \in p(E)$, $E \in p(E)$.

Exemple 1.6 $E = \{1, 2, 3\}$, *alors:* $p(E) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$.

1.3.4 Intersection

On appelle **intersection** d'une famille de parties, A, B, C, par exemple, le sous-ensemble formé par les éléments appartenant à chacune des parties considérées. On désigne cette intersection par la notation $A \cap B \cap C$. Elle peut se réduire à la partie vide, en particulier si des sous-ensembles sont disjoints. On a alors:

$$x \in A \cap B \Rightarrow x \in A \text{ et } x \in B$$

1.3.5 Réunion

L'ensemble de tous les éléments appartenant au moins à l'une des parties A, B, C, est dit la **réunion** de ces parties, notée:$A\cup$ $B \cup C$. On a alors:

$$x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in B$$

1.3.6 Partition

On réalise une **partition** d'un ensemble E en classant les éléments de E dans des sous ensembles disjoints E_1, E_2, E_3, ..., tels que tout élément de E soit classé. On la note par: $P(E)$.En particulier on a:

$$\begin{aligned} P(E) &= E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup ... \\ \text{et } E_i \cap E_j &= \varnothing, \ \forall i \neq j \end{aligned}$$

Exemple 2 $E = \{1, 2, 3\}$, *alors:*$P(E) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

ou bien $P(E) = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$...

1.3.7 Complémentaire

Le complément d'un ensemble E dans un ensemble F, est l'ensemble dans la réunion avec E est égale à F, et l'intersection avec E est égale à l'ensemble vide. On le note: C_F^E ou bien $\bar{E}$.

Donc on a:

$$\begin{aligned} E \cup \bar{E} &= F \\ \text{et } E \cap \bar{E} &= \varnothing \end{aligned}$$

1.3.8 Ensemble produit

On appelle produit de deux ensembles E et F l'ensemble des couples ordonnés du type (x, y) avec $x \in E$ et $y \in F$, noté $E \times F$.

1.3.9 Différence

La différence entre deux ensemble E et F est l'ensemble:

$$E \smallsetminus F = \{x \in E \text{ avec } x \notin F\}$$

1.3.10 Différence symétrique

La différence symétrique entre deux ensemble E et F est l'ensemble:

$$\begin{aligned} E \triangle F &= (E \smallsetminus F) \cup (F \smallsetminus E) \\ &= (E \cup F) \smallsetminus (E \cap F) \\ &= \{(x \in E \text{ avec } x \notin F) \text{ ou bien } (x \in F \text{ avec } x \notin E)\} \end{aligned}$$

1.3.11 Exemple d'application

Soient E et F deux sous ensembles de G, montrons que:

$$\bar{E} \cup \bar{F} = \left(\bar{E} \bar{\cap} \bar{F}\right)$$

1) montrons que:

$$\bar{E} \cup \bar{F} \subset \left(\bar{E} \bar{\cap} \bar{F}\right)$$

Soit $x \in \bar{E} \cup \bar{F} \Rightarrow x \in \bar{E}$ ou $x \in \bar{F} \Rightarrow x \in G$ et $x \notin E$ ou $x \in G$ et $x \notin F$.

$$\Rightarrow \quad x \in G \text{ et } x \notin E \text{ ou } x \notin F.$$

$$\Rightarrow \quad x \in G \text{ et } x \notin E \ \cap F$$

$$\Rightarrow \quad x \in \left(\bar{E} \bar{\cap} \bar{F}\right)$$

2 d'une façon similaire on montre que:

$$\left(\bar{E} \bar{\cap} \bar{F}\right) \subset \bar{E} \cup \bar{F}$$

1.4 Exercice

Exercice 01: P, Q, R sont trois propositions.

(1) Vérifier les lois de Morgan:

$$1)\ \bar{P} \bar{\vee} \bar{Q} \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q} \quad 2)\ \bar{P} \bar{\wedge} \bar{Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$$

(2) Les propositions suivantes sont elles des tautologies?

a) $[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow \bar{P} \vee Q$

b) $[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow \left[\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}\right]$

c) $[P \wedge Q] \vee R \Leftrightarrow [Q \Rightarrow R]$

d) $[P \Rightarrow (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)]$.

Exercice 02: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, Montrer que:

1) Si n^2 est pair, alors n est pair.

2) Si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est premier.

3) Si x et y sont différents alors les nombres $(x+1)(y-1)$ et $(x-1)(y+1)$ sont différents.

4) a et p sont deux entiers naturels; montrer que l'on a :

$$(\ p \text{ premier et } p \text{ divise } a^2\ ) \Rightarrow p \text{ divise } a.$$

5) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Déduire que: $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 03: Montrer par récurrence que:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \forall n \in \mathbb{N}, 4^n+6n-1 \text{ est un multiple de } 9.\\
&2)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).\\
&3)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1}\leq n!.\text{ avec } n!=n(n-1)(n-2)\ldots 1 \text{ et } 0!=1
\end{aligned}
$$

Exercice 04: A, B et C sont trois parties d'un ensemble$E$. Montrer que:

1) $A\cup B=A\cap C \Leftrightarrow B\subset A\subset C.$

2) $A\subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A \Leftrightarrow A\cup B=B$

3) $C_E^{A\cup B}=C_E^A\cap C_E^B$

4) $B=C \Leftrightarrow (A\cap B=A\cap C \text{ et } A\cup B=A\cup C)$

5) $(A\setminus B)\setminus C\subset A\setminus(B\cup C).$

6) On suppose que:$A\cap B=A\cup B$.A-t-on $B=C$.

Exercice 05: Soient E un ensemble, $A, B\in P(E)$.Résoudre dans $P(E)$ les équations suivantes:

1) $X\cup A=B$ et 2) $X\cap A=B$

3) $X-A=B$ et 4) $X\triangle A=B$

Exercice 06: Soient E un ensemble non vide, et $P(E)$ l'ensemble de ses parties. On suppose que $card$ $E=n$.Montrer par récurrence que:

$$card\ P\ (E)=2^n.$$

1.5 Solution des exercices

Exercice 01: P et Q étant deux proposition:

(1) Vérifions les lois de Morgan:

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$P \vee Q$	$\bar{P}\bar{\vee}\bar{Q}$	$\bar{P} \wedge \bar{Q}$	$P \vee Q \Leftrightarrow \bar{P} \wedge \bar{Q}$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$P \wedge Q$	$\bar{P}\bar{\wedge}\bar{Q}$	$\bar{P} \vee \bar{Q}$	$\bar{P}\bar{\wedge}\bar{Q} \Leftrightarrow \bar{P} \vee \bar{Q}$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

(2) Les propositions suivantes sont elles des tautologies?

Une tautologie est une proposition qui est vrai dans tous les cas.

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{Q}$	$P \Rightarrow Q$	$\bar{P} \vee Q$	$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

la suite du tableau

$[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow \bar{P} \vee Q$	$[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}]$
1	1
1	1
1	1
1	1

P	Q	R	$P \wedge Q$	$Q \Rightarrow R$	$Q \wedge R$	$P \Rightarrow Q$	$P \Rightarrow R$	$[P \wedge Q] \vee R$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0	1	1	0

la suite du tableau

$P \Rightarrow (Q \wedge R)$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow R)$	c)	d)
1	1	1	1
0	0	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	0	1

Ce qui implique que: les propositions a), b) et d) sont des tautologies mais b) n'est pas une tautologie.

Exercice 02: Pour $n \in \mathbb{N}^*$, Montrons par un raisonnement par l'absurde que:

(1) Si n^2 est pair, alors n est pair.

Supposons que: n n'est pas pair $\Rightarrow$ n est impair $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que: $n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$

$= 2m + 1$ avec $m = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N} \Rightarrow n^2$ est impair (contradiction avec l'hypothèse).

(2) Si $2^n - 1$ est un nombre premier alors n est premier.

Supposons que n n'est pas premier$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$ tel que: $n = a \cdot b$, $(a, b) \neq (n, 1)$ et $(a, b) \neq (1, n)$.

Alors $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = [(2^a) - 1][P(2^a)]$ avec $\deg P(2^a) = b - 1$. Mais $[(2^a) - 1] \neq 2^n - 1$ et $[(2^a) - 1] \neq 1$

$\Rightarrow 2^n - 1 = M \cdot [P(2^a)]$ avec $M \neq 2^n - 1$ et $M \neq 1 \Rightarrow 2^n - 1$ n'est pas premier (contradiction avec l'hypothèse).

(3) Si x et y sont différents alors les nombres $(x+1)(y-1)$ et $(x-1)(y+1)$ sont différents.

Supposons que $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1) \Rightarrow xy - x + y - 1 = xy + x - y - 1 \Rightarrow 2y = 2x \Rightarrow x = y$ (contradiction avec l'hypothèse).

(4) a et p sont deux entiers naturels; montrer que l'on a :

$$(p \text{ premier et } p \text{ divise } a^2) \Rightarrow p \text{ divise } a.$$

Si p premier et p divise $a^2 \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tel que: $a^2 = k \cdot p \Rightarrow a \cdot a = k \cdot p$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a \text{ divise } p \text{ et } k \text{ divise } a \text{ contradiction avec le fait que } p \text{ est premier.} \\ \text{ou bien: } p \text{divise } a \text{ et } a \text{divise } k \end{array} \right. \Rightarrow p \text{ divise } a.$$

(5) si p est premier alors $\sqrt{p}$ est un nombre irrationnel.

Supposons par l'absurde que: $\sqrt{p}$ est un nombre rationnel$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}$, $(a, b) = 1$ avec $b \neq 0$ et $\sqrt{p} = \frac{a}{b} \Rightarrow p = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow p \cdot b^2 = a^2$

$\Rightarrow p$ divise a^2 mais p premier$\Rightarrow p$ divise $a \Rightarrow a = k \cdot p$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow b^2 = p \cdot k^2 \Rightarrow p$ divise b^2, mais p premier$\Rightarrow p$ divise b

$\Rightarrow p \neq 1$ est un diviseur commun de a et b contradiction avec $(a, b) = 1 \Rightarrow \sqrt{p}$ est un nombre irrationnel.

(6) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Déduire que: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

D'après (5) $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Supposons que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est rationnel$\Rightarrow$ $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

la somme des deux nombres$\Rightarrow 2\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ contradiction$\Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 03: Montrons par récurrence que:

$$\begin{aligned} &1)\ \forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1 \text{ est un multiple de } 9. \\ &2)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k\,(k+1)\,(k+2) = \frac{1}{4} n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,. \\ &3)\ \forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!. \text{ avec } n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ldots 1 \text{ et } 0! = 1 \end{aligned}$$

1) $\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1$ est un multiple de $9.(R_n)$

Si $n = 0$, $4^0 - 6 \cdot 0 - 1 = 0 = 0.9 \Rightarrow 4^0 - 6 \cdot 0 - 1$ est un multiple de $9 \Rightarrow R_0$ est vraie.

Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ (l'hypothèse de récurrence), et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$4^{(n+1)} + 6\,(n+1) - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

En effet:

$$\begin{aligned} 4^{(n+1)} + 6\,(n+1) - 1 &= 4 \cdot 4^n + 6n + -1 + 6 \\ &= 9.k + 3.4^n + 6 \text{ (l'hypothèse de récurrence)} \\ &= 9.k + 3\,(9k - 6n + 1) + 6 = 9\,(k + 3k - 2n + 1) \\ &\Rightarrow\ 4^{(n+1)} + 6\,(n+1) - 1 \text{ est un multiple de } 9. \end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}, 4^n + 6n - 1 \text{ est un multiple de } 9.$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=1}^{n} k\,(k+1)\,(k+2) = \frac{1}{4} n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,.\,(R_n)$

Si $n = 1, \sum\limits_{k=1}^{1} k\,(k+1)\,(k+2) = 1\,(2)\,(3) = 6$ et $\frac{1}{4} n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3) = \frac{1}{4} 1\,(2)\,(3)\,(4) = 6 \Rightarrow R_1$ est vraie.

Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ (l'hypothèse de récurrence), et montrons que

(R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

En effet:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(k+2) &= \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) + (n+1)(n+2)(n+3) \\ &= \frac{1}{4}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)\end{aligned}$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3).$$

3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!. (R_n)$ avec $n! = n(n-1)(n-2)...1$ et $0! = 1$

Pour $n = 1, 2^{1-1} = 2^0 = 1 \leq 1! = 1 \Rightarrow R_0$ est vraie.

Supposons que (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ (l'hypothèse de récurrence), et montrons que (R_{n+1}) l'est aussi, c'est-à-dire:

$$2^n \leq (n+1)!$$

En effet:

$$2^n = 2.2^{n-1} \leq 2.n! \leq (n+1).n! = (n+1)!$$

Conclusion:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n!.$$

Exercice 04: A, B et C sont trois parties d'un ensemble$E$. Montrons que:

(1) $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.

"$\Rightarrow$" Montrons que: $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$

a) $B \subset A$, si $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \Rightarrow B \subset A$

b) $A \subset C$, si $x \in A \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow x \in A$ et $x \in C \Rightarrow A \subset C$

$\Rightarrow B \subset A \subset C$

"$\Leftarrow$ "$B \subset A \subset C \Rightarrow A \cup B = A \cap C$

a) $A \cup B \subset A \cap C$, si $x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in C \\ \text{ou } x \in B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap C$

b) $A \cap C \subset A \cup B$, si $x \in A \cap C \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \cup B$

(2) $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A \Leftrightarrow A \cup B = B$

a) Montrons que: $A \subset B \Leftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$

En effet:

"$\Rightarrow$ "si $x \in C_E^B \Rightarrow x \in E$ et $x \notin B \Rightarrow x \in E$ et $x \notin A$ car $A \subset B \Rightarrow x \in C_E^A$

"$\Leftarrow$ "si $x \in A \Rightarrow x \notin C_E^A \Rightarrow x \notin C_E^B \Rightarrow x \in B$

b) Montrons que: $C_E^B \subset C_E^A \Leftrightarrow A \cup B = B$

"$\Rightarrow$ "1) $A \cup B \subset B$?

si $x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \notin C_E^A \Rightarrow x \notin C_E^B \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{B} \\ \text{ou } \mathbf{x} \in \mathbf{B} \end{cases} \Rightarrow x \in B$

2)$B \subset A \cup B$ évident dans tous les cas.

"$\Leftarrow$ "$C_E^B \subset C_E^A$?

si $x \in C_E^B \Rightarrow x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in C_E^A$.

(3) $C_E^{A \cup B} = C_E^A \cap C_E^B$

"$\subset$ "$C_E^{A \cup B} \subset C_E^A \cap C_E^B$?

si $x \in C_E^{A \cup B} \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ et $x \notin B \Rightarrow x \in C_E^A$ et $x \in C_E^B \Rightarrow x \in C_E^A \cap C_E^B$

"$\supset$ " $C_E^A \cap C_E^B \subset C_E^{A \cup B}$

si $x \in C_E^A \cap C_E^B \Rightarrow x \in C_E^A$ et $x \in C_E^B \Rightarrow x \notin A$ et $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in C_E^{A \cup B}$.

(4) $B = C \Leftrightarrow (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C)$

"$\Rightarrow$ " Montrons que: $(A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C)$?

si $B = C \Rightarrow A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$

"$\Leftarrow$ " Montrons que: $B = C$?

"$\subset$ "si $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \cup C$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in A \cap B \quad \text{car on a } x \in B \Rightarrow x \in A \cap C \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{C} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ou } \mathbf{x} \in \mathbf{C} \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in C$

"$\supset$ " si $x \in C \Rightarrow x \in A \cup C \Rightarrow x \in A \cup B$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in A \cap C \text{ car on a } x \in C \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{B} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ou } \mathbf{x} \in \mathbf{B} \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in B$

(5) $(A \setminus B) \setminus C \subset A \setminus (B \cup C)$.

si $x \in (A \setminus B) \setminus C \Rightarrow x \in (A \setminus B)$ et $x \notin C \Rightarrow x \in A$ et $x \notin B$ et $x \notin C \Rightarrow x \in A$ et $(x \notin B$ et $x \notin C)$

$\Rightarrow x \in A$ et $x \notin B \cup C \Rightarrow x \in A \setminus (B \cup C)$

(6) On suppose que:$A \cap B = A \cup C$.A-t-on $B = C$.

Non car par exemple: $A = \{1, 2, 4\}, B = \{1, 2, 4\}$ et $C = \{1, 2\}$ on a: $A \cap B = A \cup C$.mais $B \neq C$.

Exercice 05: Soient E un ensemble non vide, et $P\ (E)$ l'ensemble de ses parties. On suppose que $card$ $E = n$.

Montrer par récurrence que:

$$card\ P\ \ (E) = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Par récurrence:

1ère étape: Pour un ensemble qui contient un seul élément par exemple: $E = \{a\} \Rightarrow P$ $(E) = \{\varnothing, \{a\}\}$

$\Rightarrow card\ P\ (E) = 2^1 = 2$

donc la relation est vraie pour $n = 1$

2ème étape: supposons que pour un ensemble A_n qui contient n éléments alors: $card\ P$ $(A_n) = 2^n$

et montrons que pour un ensemble A_{n+1} qui contient $n+1$ éléments alors: $card\ P$ $(A_{n+1}) = 2^{n+1}$

En effet: si on a un ensemble A_{n+1} qui contient $n+1$ éléments alors: l'ensemble des parties contient les sous ensembles

qui ont un lien avec les n premiers éléments qui sont 2^n sous ensembles et on ajoute les mêmes sous enembles mais qui contients

l'élément d'ordre $(n+1)$ à chaque fois.$\Rightarrow card\ P\ (A_{n+1}) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

conclusion:

$$card\ P\ \ (E) = 2^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 06: Soient E un ensemble, $A, B \in P\ (E)$ .Résoudre dans $P\ (E)$ les équations suivantes:

$$(1)\ X \cup A = B \qquad \text{et} \qquad (2)\ X \cap A = B$$

$$(3)\ X - A = B \qquad \text{et} \qquad (4)\ X \bigtriangleup A = B$$

(1) $X \cup A = B\ \ \Rightarrow A \subset B \Rightarrow X = C_B^A \cup Y$ avec$Y \subset A$

Alors l'ensemble des solutions est $\Gamma_1 = \left\{X = C_B^A \cup Y \text{ avec } Y \in P\,(A) \rightarrow \text{ ensemble des parties de } A\right\}$

(2) $X \cap A = B \Rightarrow B \subset A \Rightarrow X = B \cup Y$ avec$Y \subset C_E^A$

Alors l'ensemble des solutions est $\Gamma_2 = \left\{X = B \cup Y \text{ avec } Y \in P\left(C_E^A\right) \rightarrow \text{ ensemble des parties de } C_E^A\right\}$

(3) $X - A = B \Rightarrow A \cap B = \varnothing \Rightarrow X = B \cup Y$ avec$Y \subset A$

Alors l'ensemble des solutions est $\Gamma_3 = \{X = B \cup Y \text{ avec } Y \in P\,(A) \rightarrow \text{ ensemble des parties de } A\}$

(4) $X \bigtriangleup A = B \Rightarrow X = (B - A) \cup (A \cap B)\,.$

Chapitre 2

Relations d'équivalence- Relations d'ordre

2.1 RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

2.1.1 NOTION DE RELATION BINAIRE

On appelle **relation** de E vers F tout procédé associant à des éléments de E des éléments de F.

Soit $\Re$ une relation de E vers F. Si $x \in E$ est en relation avec $y \in F$, on notera:

$$x\Re y$$

L'ensemble des couples $(x, y) \in E \times F$ vérifiant une relation $\Re$ est appelé le **graphe** de $\Re$.

Si $E = F$, une relation de E vers F est appelée **relation binaire** sur E (ou dans E). Par exemple l'égalité est une relation binaire sur tout ensemble E.

Propriétés des relations binaires dans un ensemble

Soit $\Re$ une relation binaire dans un ensemble E et x, y, z des éléments de E.

Reflexivité $\Re$ est **réflexive** si:

$$\forall x \in E \qquad x\Re x$$

Exemple 3 *Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par:*

$$x \Re y \Leftrightarrow 3 \ divise \ (x-y)$$

(On rappelle que a divise $b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b = ka$).

Alors on a: pour tout $x \in \mathbb{Z}$, $x - x = 0 = 0 \cdot 3$, donc 3 divise $(x - x)$, d'où $x \Re x$, et par suite $\Re$ est réflexive.

Transitivité $\Re$ est **transitive** si:

$$\forall x, y, z \in E \qquad x \Re y \quad \text{et} \quad y \Re z \Rightarrow x \Re z$$

Exemple 4 *Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par:*

$$\left(x, x'\right) \Re \left(y, y'\right) \Leftrightarrow x + x' = y + y'$$

Alors on a: pour tout $(x, x') \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $x + x' = x + x'$, d'où $(x, x') \Re (x, x')$, et par suite $\Re$ est réflexive.

Symétrie $\Re$ est **symétrique** si:

$$\forall x, y \in E \qquad x \Re y \quad \Rightarrow \quad y \Re x$$

Exemple 5 *Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{R}$ par:*

$$x \Re y \Leftrightarrow (x-y) \ \ est \ un \ multiple \ de \ 2$$

Alors on a: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \Re y \Leftrightarrow (x-y)$ est un multiple de $2 \Rightarrow (y-x)$ est un multiple de 2 $\Rightarrow y \Re x$, et par suite $\Re$ est symétrique.

Antisymétrie $\Re$ est **antisymétrique** si:

$$\forall x, y \in E \qquad x \Re y \ \text{et} \quad y \Re x \Rightarrow x = y$$

Exemple 6 *Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par:*

$$a\Re b \Leftrightarrow a \text{ } divise \text{ } b$$

Alors on a: $\forall a, b \in \mathbb{N}^*, a\Re b \Leftrightarrow a$ *divise* $b \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{N}^*$ *tel que:*$b = k_1 \cdot a,$ *d'autre part on a:*

$$\begin{aligned} b\Re a &\Leftrightarrow b \text{ } divise \text{ } a \Rightarrow \exists k_2 \in \mathbb{N}^* telque : a = k_2 \cdot b \\ &\Rightarrow a = k_2 \cdot k_1 \cdot a \\ &\Rightarrow k_2 \cdot k_1 = 1 \Rightarrow k_2 = k_1 = 1 \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

et par suite $\Re$ est antisymétrique.

2.1.2 RELATION D'ÉQUIVALENCE

Définition

Une relation définie dans un ensemble E est une relation **d'équivalence** si elle est:

♣ réflexive,

♣ symétrique,

♣ transitive.

Si $x\Re y$, avec $\Re$ est une relation d'équivalence. Alors on dit que x est équivalent à y modulo $\Re$.

Exemple 2.1 *Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par:*

$$x\Re y \Leftrightarrow 3 \text{ } divise \text{ } (x - y)$$

Classe d'équivalence

Une **classe d'équivalence** d'un élément x donné est l'ensemble des éléments y équivalents à cet élément notée: $\dot{x}$ ou $cl\,(x)$ ou bien $C\,(x)$.

Exemple 7 *Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par:*

$$x\Re y \Leftrightarrow 3 \ divise \ (x-y)$$

alors:

$$\begin{aligned}
\dot{2} &= \{x \in \mathbb{Z} \ tel \ que: \ \ x\Re 2\} \\
x\Re 2 &\Leftrightarrow 3 \ divise \ (x-2) \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x - 2 = k \cdot 3 \\
&\Rightarrow x = k \cdot 3 + 2 \\
&\Rightarrow \dot{2} = \{..., -7, -4, -1, 2, 5, 8, ...\}
\end{aligned}$$

Ensemble quotient

L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\Re$ se nomme **ensemble quotient** de E par $\Re$ et se note $\frac{E}{\Re}$ ou $E/\Re$.

L'ensemble quotient constitue une **partition** de E.

En effet si $x \in E$, $\dot{x} \neq \varnothing$ puisque $\Re$ est réflexive et $x \in \dot{x}$.

Et on a: $\cup \, \dot{x} = E, x \in E$.

Enfin si $\dot{x} \neq \dot{y} \Rightarrow \dot{x} \cap \dot{y} = \varnothing$ car s'il existe un élément $a \in \dot{x} \cap \dot{y} \Rightarrow a\Re x$ et $y\Re a \Rightarrow x\Re y \Rightarrow \dot{x} = \dot{y}$ (contradiction).

Remarque 2.1 *Si $a \in \dot{x}$ alors $\dot{a} = \dot{x}$.*

2.2 RELATION D'ORDRE

Définition 2.1 *Une relation définie dans un ensemble E est une relation* ***d'ordre*** *si elle est:*

♣ réflexive,

♣ antisymétrique,

♣ transitive.

Exemple 8 *Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par:*

$$p\Re q \Leftrightarrow \left(\exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } p^n = q\right).$$

En effet:

a) La réflexivité:

$$\text{on a: } p^1 = p \Rightarrow p\Re p \Rightarrow \Re \text{ est réflexive.}$$

b) L'antisymétrie:

$$\begin{aligned}
\text{si:} \quad & p\Re q \text{ et } q\Re\, p \Rightarrow \\
& \begin{cases} (\exists n_1 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } p^{n_1} = q) \text{ et} \\ (\exists n_2 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } q^{n_2} = p) \end{cases} \\
\Rightarrow \quad & q^{n_1 n_2} = q \Rightarrow n_1 n_2 = 1 \Rightarrow n_1 = n_2 = 1 \\
\Rightarrow \quad & p = q \Rightarrow \Re \text{ est antisymétrique.}
\end{aligned}$$

b) La transitivité:

$$\begin{aligned}
\text{si:} \quad & p\Re q \text{ et } q\Re\, r \Rightarrow \\
& \begin{cases} (\exists n_1 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } p^{n_1} = q) \text{ et} \\ (\exists n_2 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } q^{n_2} = r) \end{cases} \\
\Rightarrow \quad & p^{n_1 n_2} = r \Rightarrow (\exists m = n_1 n_2 \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } p^m = r) \\
\Rightarrow \quad & p\Re\, r \Rightarrow \Re \text{ est transitive.}
\end{aligned}$$

conclusion: $\Re$ est une relation d'ordre.

2.2.1 L'ordre total et l'ordre partiel

Définition 2.2 *Soit $\Re$ une relation d'ordre définie sur un ensemble E, alors si pour tout $x, y \in E$, on a ou bien $x\Re y$ ou $y\Re x$, on dira que l'ordre est total, si non c'est à dire*

$$\exists \alpha, \beta \in E \text{ tel que on a ni } \alpha\Re\beta \text{ ni } \beta\Re\alpha$$

alors $\Re$ est un ordre partiel.

Exemple 2.2 *Soit $\Re$ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par:*

$$p\Re q \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } p^n = q)\,.$$

$\Re$ est un ordre partiel car:

$$pour\ \alpha = 2 \text{ et } \beta = 3 \text{ on ni } \alpha\Re\beta \text{ ni } \beta\Re\alpha.$$

2.2.2 MAJORANT,MINORANT

Définition 2.3 *Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\Re$, alors M est un majorant de E, si $\forall x \in E, x\Re M$. D'autre part m est un minorant de E, si $\forall x \in E, m\Re x$.*

Exemple 2.3 *Dans $I = [2,5[$ muni d'une relation d'ordre $\Re$ définie par:*

$$x\Re y \Leftrightarrow x \leq y$$

l'ordre est total et on a par exemple:

$$7 \text{ est un majorant de } I \text{ et } -3 \text{ est un minorant de } I.$$

2.2.3 La borne supérieure, la borne inférieure

Définition 2.4 *Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\Re$, alors la borne supérieure d'un ensemble E est le plus petit des majorant, notée $SupE$. D'autre part la borne inférieure est le plus grand des minorants, notée $Inf\ E$.*

Exemple 2.4 *Dans $I = [2,5[$ muni d'une relation d'ordre $\Re$ définie par:*

$$x\Re y \Leftrightarrow x \leq y$$

$$SupI = \ 5et\ Inf\ I = 2\ .$$

2.2.4 Maximum, minimum

Définition 2.5 *Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\Re$, alors si la borne supérieure d'un ensemble E appartient à E, alors l'élément maximal (maximum) ou dit le plus grand élément de l'ensemble existe et il est égal à la borne supérieure de E, si non alors le maximum n'existe pas. D'autre part si la borne inférieure d'un ensemble E appartient à E, alors l'élément minimal (minimum) ou dit le plus petit élément de l'ensemble existe et il est égal à la borne inférieure de E, si non le minimum n'existe pas.*

On note le maximum par: $MaxE$ et le minimum par: $MinE$

Exemple 2.5 *Dans $I = [2, 5[$ muni d'une relation d'ordre $\Re$ définie par:*

$$x \Re y \Leftrightarrow x \leq y$$

$$\begin{cases} SupI = \ 5 \notin I \Rightarrow MaxI \ \text{n'existe pas et} \\ Inf \ \ I = 2 \ \in I \Rightarrow Min \ I = \ Inf \ \ I = 2 \ . \end{cases}$$

2.3 Exercice

Exercice 01: On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation R par:

$$x \ R \ y \iff x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}$$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 02: On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation R par: $x \ R \ y \iff \frac{x}{y} > 0$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer $cl\ (1)$ et $cl\ (-2)$. En déduire la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 03: soit S la relation dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$a \ S \ b \ \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b$$

(1) Montrer que S est une relation d'équivalence.

(2) Discuter suivant la valeur de m le nombre d'éléments contenus dans la classe de m .

Exercice 04: Soit R la relation binaire définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par:

$$(x, y)\, R \left(x\,', y\,'\right) \Leftrightarrow xy\,' - x\,'y = 0.$$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer $cl\ ((1,2))$ et $cl\ ((-1,2))$.

Exercice 05 : Dans $p(E)$, ensemble des parties de $E \neq \varnothing$, R est définie par:

$$A\ R\ B \Leftrightarrow \left(A = B \text{ ou } A = C_E^B\right)$$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

(2) Déterminer $cl\ (\varnothing)$,en déduire $cl\ (E)$.

(3) A-t-on $cl\ (A \cap B) = cl\ (A) \cap cl\ (B)$ pour A, B dans $p(E)$?justifier.

Exercice 06: Soit Φ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$x \quad \Phi \quad y \Leftrightarrow\ \exists\ n\ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x^{\ n} =\ y\ .$$

(1) Montrer que Φ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$.

(2) Cet ordre est-il total ?

(3) Soit l'ensemble $B = \{1,\ 4,\ 8\}$. Déterminer s'ils existent, $Max\ A$ et $Min\ A$ pour l'ordre Φ.

Exercice 07: Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par:

$$(x, y) \leq \left(x\,', y\,'\right) \Leftrightarrow x \leq x\,' \ \text{ et } \ y \leq y\,'.$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

(2) Préciser deux minorants, deux majorants, bornes inférieure et supérieure de la partie:

$$A \ = \{(1,2)\,,\ \ (3,1)\}\,.$$

(3) La partie A possède-t-elle un plus grand élément ? un plus petit élément ?.

Exercice 08: On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation S par:

$$a\ S\ b \Leftrightarrow \quad a \leq b+1$$

(1) Vérifier que $0\ S\ 1$ et $1\ S\ 0$.Donner une conclusion?

(2) Soit R la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par:

$$a\ R\ b \Leftrightarrow \quad a \quad \langle \ \ b+1$$

Montre que R est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.

2.4 Solution des exercices

Exercice 01: On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation R par:

$$x\ R\ y\ \Longleftrightarrow x^2-\frac{1}{x^2}=y^2-\frac{1}{y^2}$$

(1) Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}^*$.

a) $\Re$ est-elle réflexive?

$\Re$ est réflexive$\Leftrightarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad x\ \ \Re\, x.$

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\ x^2-\frac{1}{x^2}=x^2-\frac{1}{x^2}\Rightarrow x\ \Re x\Rightarrow \Re \text{ est réflexive}$$

b) $\Re$ est-elle symétrique?

$\Re$ est symétrique$\Leftrightarrow \forall (x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \qquad x \ \Re \ y \Rightarrow y \ \Re \ x.$

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \ &\in \ \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \qquad x \ \Re y \Rightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2} \\
&\Rightarrow \ y^2 - \frac{1}{y^2} = x^2 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y \Re x \\
&\Rightarrow \ \Re \text{ est symétrique .}
\end{aligned}$$

c) $\Re$ est-elle transitive?

$\Re$ est transitive$\Leftrightarrow$

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, x \ \Re y \text{ et } y \Re z \Rightarrow \ x \ \Re z.$$

$$\begin{aligned}
\forall (x,y,z) \ &\in \ \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \qquad x \ \Re y \text{ et } y \Re z \\
&\Rightarrow \ x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2} \text{ et } y^2 - \frac{1}{y^2} = z^2 - \frac{1}{z^2} \\
&\Rightarrow \ x^2 - \frac{1}{x^2} = z^2 - \frac{1}{z^2} \Rightarrow x \ \Re z.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\Re$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}^*$.

2) Déterminons la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}^*$.

$\dot{a} = \{x \in \mathbb{R}^* / x \ \Re a\}$ alors: $x \ \Re a \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = a^2 - \frac{1}{a^2} \Rightarrow x^4 - 1 = \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) x^2 \Rightarrow x^4 - \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) x^2 - 1 = 0$

0n pose $t = x^2 \Rightarrow t^2 - \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) t - 1 = 0 \Rightarrow \triangle = \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 - 4$
$= \left[a^2 - \frac{1}{a^2} - 2\right] \cdot \left[a^2 - \frac{1}{a^2} + 2\right]$
alors: 1/ Si $\triangle = 0 \Rightarrow \left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 - 4 = 0 \Rightarrow a^2 - \frac{1}{a^2} = \pm 2 \Rightarrow t = \frac{-\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)}{2} \Rightarrow t = 1$ou $t = -1$ qui ne convient pas car $t > 0$

$\Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \dot{a} = \{a, 1, -1\}$.

1. 2/ Si $\triangle < 0 \Rightarrow$ alors on a un élément unique dans la classe de $a \Rightarrow \dot{a} = \{a\}$.

   3/ Si $\triangle > 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) - \sqrt{\triangle}}{2}$ ou bien $t_2 = \frac{\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) + \sqrt{\triangle}}{2}$ alors on a 5 éléments dans la classe de a

$\Rightarrow \dot{a} = \left\{a, \sqrt{t_2}, -\sqrt{t_2}, \sqrt{t_1}, -\sqrt{t_1}\right\}$.

Exercice 02: On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation R par:

$$x \ R \ y \iff \frac{x}{y} > 0$$

(1) Montrons que $\Re$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}^*$.

a) $\Re$ est-elle réflexive?

$\Re$ est réflexive$\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad x \ \Re \ x$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \ \frac{x}{x} = 1 > 0 \Rightarrow x \ \Re x \Rightarrow \Re \text{ est réflexive}$$

b) $\Re$ est-elle symétrique?

$\Re$ est symétrique$\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \qquad x \ \Re \ y \Rightarrow y \ \Re \ x$.

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \quad &\in \quad \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \qquad x \ \Re y \Rightarrow \frac{x}{y} > 0 \Rightarrow \ \frac{y}{x} > 0 \Rightarrow y \Re x \\ &\Rightarrow \quad \Re \text{ est symétrique} \end{aligned}$$

c) $\Re$ est-elle transitive?

$\Re$ est transitive$\Leftrightarrow$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, x \ \Re y \text{ et } y \Re z \Rightarrow \ x \ \Re z.$$

$$\begin{aligned} \forall (x, y, z) \quad &\in \quad \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*, \qquad x \ \Re y \text{ et } y \Re z \ \Rightarrow \frac{x}{y} > 0 \text{et } \frac{y}{z} > 0 \\ &\Rightarrow \quad x \text{ et } y \text{ ont le même signe et } y \text{ et } z \text{ ont le même signe et } x \neq 0 \\ &\Rightarrow \quad x \text{ et } z \text{ ont le même signe et } x \neq 0 \Rightarrow \ x \ z \geq 0 \Rightarrow x \ \Re z \Rightarrow \Re \text{ est transitive} \end{aligned}$$

Conclusion : $\Re$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{R}^*$.

(2) Déterminons la classe d'équivalence de 1.

$$\begin{aligned} \dot{1} \quad &= \quad \{x \in \mathbb{R}^* / x \ \Re 1\}. \\ x \ \Re 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{x}{1} > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \dot{1} =]0, +\infty[\end{aligned}$$

b) Déterminons la classe d'équivalence de -2.

$$\begin{aligned} \dot{2} &= \{x \in \mathbb{R}^* / x \, \Re \, (-2)\}. \\ x \, \Re 1 &\Rightarrow \frac{x}{-2} > 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow -\dot{2} =]-\infty, 0[\end{aligned}$$

(3) Soit $a \in \mathbb{R}^*$, alors $\dot{a} = \begin{cases}]0, +\infty[\text{ si } a > 0 \\ ]-\infty, 0[\text{ si } a < 0 \end{cases}$

Exercice 03: soit S la relation dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$a \; S \; b \; \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b$$

(1) Montrons que S est une relation d'équivalence.

a) S **est-elle réflexive?**

S est réflexive$\Leftrightarrow$ $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a \;\; S \; a.$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \Rightarrow a^3 - a^3 = a - a = 0 \Rightarrow a \; Sa \Rightarrow S \text{ est réflexive}$$

b) S **est-elle symétrique?**

S est symétrique$\Leftrightarrow \forall (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad a \;\; \Re \; b \Rightarrow b \; \Re \; a.$

$$\begin{aligned} \forall (a, b) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad a \, \Re b \Rightarrow a^3 - b^3 = a - b \Rightarrow \\ &\Rightarrow b^3 - a^3 = b - a \Rightarrow b \; Sa \Rightarrow S \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

c) S **est-elle transitive?**

S est transitive$\Leftrightarrow$ $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, aSb$ et $bSc \Rightarrow \;\; a \; Sc.$

$$\begin{aligned} \forall (a, b, c) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ a \, \Re b &\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \Rightarrow a^3 - b^3 = a - b \\ \text{et } bSc &\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \Rightarrow b^3 - c^3 = b - c \\ &\Rightarrow a^3 - c^3 = a - c \Rightarrow a \; Sc \Rightarrow S \text{ est transitive} \end{aligned}$$

2) Discuter suivant la valeur de m le nombre d'éléments contenus dans la classe de m .

$cl\ (m) = \{a \in \mathbb{R} /\ mSa\}$

$mSa \Leftrightarrow \quad m^3 - a^3 = m - a$

$\Rightarrow\ (m-a)\ (m^2 + am + a^2) = (m-a)$

$\Rightarrow\ (a-m)\ (a^2 + ma + m^2) = (a-m) \Rightarrow$

$$\begin{cases} a = m \\ \text{ou } a^2 + ma + m^2 = 1 \Rightarrow a^2 + ma + m^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

conclusion: pour $\triangle = m^2 - 4\left(m^2 - 1\right)$

$= 4 - 3m^2 = \left(2 - \sqrt{3}m\right) \quad \left(2 + \sqrt{3}m\right)$

1/ Si $\triangle = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $m = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ alors on a deux éléments dans la classe de m.

2/ Si $\triangle < 0 \Rightarrow m \in \left]-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ alors on a un élément unique dans la classe de m.

3/ Si $\triangle > 0 \Rightarrow m \in \left]-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[$ alors on a 3 éléments dans la classe de m.

Exercice 04: Soit R la relation binaire définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par:

$$(x, y)\, R \left(x', y'\right) \Leftrightarrow xy\,' - x\,'y = 0.$$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

a) R est-elle réflexive?

R est réflexive$\Leftrightarrow\ \forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ \ (x, y)\, R\, (x, y)$?

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \Rightarrow xy\ - x\ y = 0 \Rightarrow (x, y)\, R\, (x, y) \Rightarrow R \text{ est réflexive}$$

b) R est-elle symétrique?

R est symétrique$\Leftrightarrow \forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \qquad (x, y)\, R\, (x', y') \Rightarrow (x', y')\, R\, (x, y)$?

soient $(x, y), \left(x', y'\right) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, si $(x, y)\, R \left(x', y'\right) \Rightarrow xy\,' - x\,'y = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ x\,'y - xy\,' = 0 \Rightarrow \left(x', y'\right) R\, (x, y) \Rightarrow R$ est symétrique.

c) R est-elle transitive?

R est transitive$\Leftrightarrow$ $\forall (x,y),(x',y'),(x'',y'') \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*, (x,y)\,R\,(x',y')$ et $(x',y')\,R\,(x'',y'') \Rightarrow$ $(x,y)\,R\,(x'',y'')$.

$$\begin{aligned} \text{soient } (x,y),\left(x',y'\right),(x'',y'') &\in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*, \\ (x,y)\,R\left(x',y'\right) &\Rightarrow xy\,'-x\,'y=0 \Rightarrow x'=\frac{xy\,'}{y} \text{ car } y\in\mathbb{N}^* \\ \text{et } \left(x',y'\right)R\left(x'',y''\right) &\Rightarrow x'y''-x''y'=0 \Rightarrow \frac{xy\,'}{y}y''-x''y'=0 \\ &\Rightarrow \frac{x}{y}y''-x''=0 \Rightarrow xy''-yx''=0 \\ &\Rightarrow (x,y)\,R\left(x'',y''\right) \Rightarrow R \text{ est transitive} \end{aligned}$$

(2) Déterminer $cl\ ((1,2))$ et $cl\ ((-1,2))$.

$$\begin{aligned} cl\,((1,2)) &= \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ (x,y)\,R\,(1,2)\} \\ (x,y)\,R\,(1,2) &\Leftrightarrow 2x-y=0 \Rightarrow cl\,((1,2))=\{x\,(1,2)\,,x\in\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

et pour:

$$\begin{aligned} cl\,((-1,2)) &= \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*,\ (x,y)\,R\,(-1,2)\} \\ (x,y)\,R\,(-1,2) &\Leftrightarrow 2x+y=0 \Rightarrow cl\,((-1,2))=\{x\,(1,-2)\,,x\in\mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Exercice 05 : Dans $p\,(E)$, ensemble des parties de $E\neq\varnothing, R$ est définie par:

$$A\ R\ B \Leftrightarrow \left(A=B \text{ ou } A=C_E^B\right)$$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

$\Re$ est réflexive$\Leftrightarrow$ $\forall A\in p\,(E)\,,\quad A\ \ \Re\ A.$

$$\text{on a: } A=A \Rightarrow A\ \Re A \Rightarrow \Re \text{ est réflexive}$$

b) $\Re$ est-elle symétrique?

$\Re$ est symétrique$\Leftrightarrow \forall A, B \in p(E), \qquad A \Re B \Rightarrow B \Re A?$

$$\begin{aligned}
\text{soient } A, B &\in p(E), \qquad A \Re B \Rightarrow \left(A = B \text{ ou } A = C_E^B\right) \\
&\Rightarrow \left(B = A \text{ ou } B = C_E^A\right) \Rightarrow B \Re A \\
&\Rightarrow \Re \text{ est symétrique .}
\end{aligned}$$

c) $\Re$ est-elle transitive?

$\Re$ est transitive$\Leftrightarrow$

$$\forall A, B, C \in p(E), \qquad A \Re B \text{ et } B \Re C \Rightarrow A \Re C.$$

$$\begin{aligned}
\forall A, B, C &\in p(E), \qquad A \Re B \text{ et } B \Re C \Rightarrow \left(A = B \text{ ou } A = C_E^B\right) \\
&\quad \text{et } \left(B = C \text{ou } B = C_E^C\right) \\
&\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}
A = B \text{ et } B = C \Rightarrow A = C \\
A = B \text{ et} B = C_E^C \Rightarrow A = C_E^C \\
A = C_E^B \text{ et } B = C \Rightarrow A = C_E^C \\
A = C_E^B \text{ et} B = C_E^C \Rightarrow A = C
\end{array}\right. \Rightarrow \left(A = C \text{ ou } A = C_E^C\right) \\
&\Rightarrow A \Re C.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\Re$ est une relation d'équivalence dans $p(E)$.

(2) Déterminer $cl\ (\varnothing)$,en déduire $cl\ (E)$.

$$\begin{aligned}
cl(\varnothing) &= \{A \in p(E) / A \Re \varnothing\} \\
A \Re \varnothing &\Leftrightarrow \left(A = \varnothing \text{ ou } A = C_E^{\varnothing}\right) \Rightarrow A = \varnothing \text{ ou } A = E \\
cl(\varnothing) &= \{\varnothing, E\} \text{ et puisque } E \in cl(\varnothing) \Rightarrow cl(E) = \{\varnothing, E\}
\end{aligned}$$

(3) A-t-on $cl\ (A \cap B) = cl\ (A) \cap cl\ (B)$ pour A, B dans $p(E)$?justifier.

non car pour: $A = \varnothing$ et $B = \{1\}$ on a: $cl\ (A \cap B) = cl(\varnothing) = \{\varnothing, E\}$

mais $cl\ (A) \cap cl\ (B) = cl(\varnothing) \cap cl(\{1\}) \neq \{\varnothing, E\}$ car $\{1\} \notin \{\varnothing, E\}$

donc: $cl\ (A \cap B) \neq cl\ (A) \cap cl\ (B)$

Exercice 06: Soit Φ la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$x \quad \Phi \quad y \Leftrightarrow \ \exists\, n \ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x^{\,n} = \ y\ .$$

(1) Montrer que Φ est une relation d'ordre dans $\mathbb{N}^*$.

a) Φ est-elle réflexive?

Φ est réflexive$\Leftrightarrow \ \forall x \in \mathbb{N}^*,\ \ x\ \Phi\ x$?

$$\forall x \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists\ n = 1 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x^{\,1} = x \Rightarrow x\ \Phi\ x \Rightarrow \Phi \text{ est réflexive}$$

b) Φ est-elle antisymétrique?

Φ est antisymétrique$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{N}^*, \qquad x\ \Phi\ y \quad$ et $y\ \Phi\ x \Rightarrow\ \ x = y$?

$$\begin{aligned} \text{soient } x, y\ \mathbb{N}^*,\ \ \text{si } x\Phi y \ \ \text{ et } y\Phi x \ \ &\Rightarrow \ \exists\ n_1 \ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x^{\,n_1} = \ y \\ \text{et } \exists\ n_2 \ \ &\in \ \ \mathbb{N} \text{ tel que : } y^{n_2} = \ x \ \Rightarrow (\ y^{n_2})^{n_1} = x^{\,n_1} = \ y \\ &\Rightarrow \ n_1 n_2 = 1 \Rightarrow n_1 = n_2 = 1 \\ &\Rightarrow \ x = y \Rightarrow \Phi \text{ est antisymétrique.} \end{aligned}$$

c) Φ est-elle transitive?

Φest transitive$\Leftrightarrow \ \forall x, y, z \in \mathbb{N}^*, x\ \Phi\ y$ et $y\ \Phi\ z \Rightarrow x\ \Phi\ z$.

$$\begin{aligned} \text{soient } x, y, z \ \ &\in \ \ \mathbb{N}^*, \\ x\Phi y \text{ et } y\Phi z \ \ &\Rightarrow \ \ \exists\ n_1 \ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x^{\,n_1} = \ y \\ \text{et } \exists\ n_2 \ \ &\in \ \ \mathbb{N} \text{ tel que : } y^{\,n_2} = \ z \Rightarrow (x^{\,n_1})^{n_2} = z \\ \exists n \ \ &= \ \ n_1 n_2 \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x^{\,n} = z \\ &\Rightarrow \ \ x\ \Phi\ z \ \Rightarrow \Phi \text{ est transitive} \end{aligned}$$

(2) Cet ordre est-il total ?

L'ordre n'est pas total car pour les deux entiers $\{2,3\}$ on a ni $2\ \Phi 3$ ni $3\ \Phi\ 2$.

(3) Soit l'ensemble $B = \{1,\ 4,\ 8\}$. Déterminer s'ils existent, $Max\ B$ et $Min\ B$ pour l'ordre Φ.

$$M \text{ est un majorant de } B \Leftrightarrow \forall x \in B, x\ \Phi\ M \Rightarrow \begin{cases} 1\ \Phi M \Rightarrow \exists\ n_1\ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } 1^{\ n_1} = \ M \\ 4\ \Phi M \Rightarrow \exists\ n_2\ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } 4^{\ n_2} = M \\ 8\ \Phi M \Rightarrow \exists\ n_3\ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } 8^{\ n_3} = \ M \end{cases}$$

Alors les seul majorant est $M = 1$ d'après la première équation

$\Rightarrow SupB = 1 \Rightarrow Max\ B = 1$

et on a m est un minorant de $B \Leftrightarrow \forall x \in B, m\ \Phi\ x$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ \Phi 1 \Rightarrow \exists\ n_1\ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } m^{\ n_1} = \ 1 \Rightarrow m \in \mathbb{N} \\ m\ \Phi 4 \Rightarrow \exists\ n_2\ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } m^{\ n_2} = 4 \Rightarrow m = 2, 4 \\ m\ \Phi 8 \Rightarrow \exists\ n_3\ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } m^{\ n_3} = \ 8 \Rightarrow 2, 8 \\ \Rightarrow m = 2 (\text{ l'intersection entre les trois cas}) \end{cases}$$

$\Rightarrow InfB = 2 \notin B \Rightarrow Min\ B$ n'existe pas.

Exercice 07: Soit dans $\mathbb{R}^2$ la relation définie par:

$$(x, y) \leq \left(x\ ', y\ '\right) \Leftrightarrow x \leq x\ ' \ \text{ et } \ y \leq y\ '.$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre. L'ordre est-il total ?

a) $\leq$ est-elle réflexive?

$\leq$ est réflexive$\Leftrightarrow$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ (x, y) \leq (x, y)$?

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x \leq x \ \text{ et } \ y \leq y \ \Rightarrow (x, y) \leq (x, y) \Rightarrow \ \leq \text{est réflexive}$$

b) $\leq$ est-elle antisymétrique?

$\leq$ est antisymétrique$\Leftrightarrow$ $\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2,\ (x, y) \leq (x', y')$ et $(x', y') \leq (x, y) \Rightarrow (x, y) =$

(x', y')?

$$\begin{aligned} \text{soient } (x,y), \left(x',y'\right) &\in \mathbb{R}^2, \text{ si } (x,y) \leq \left(x',y'\right) \Rightarrow x \leq x\,' \text{ et } y \leq y\,' \\ \text{et si } \left(x',y'\right) R\,(x,y) &\Rightarrow x\,' \leq x \text{ et } y\,' \leq y \Rightarrow x = x' \text{ et } y = y' \\ &\Rightarrow (x,y) = \left(x',y'\right) \Rightarrow \leq \text{ est antisymétrique.} \end{aligned}$$

c) $\leq$ est-elle transitive?

$\leq$ est transitive$\Leftrightarrow$ $\forall (x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2, (x,y) \leq (x',y')$ et $(x',y') \leq (x'',y'') \Rightarrow (x,y) \leq (x'',y'')$.

$$\begin{aligned} \text{soient } (x,y), \left(x',y'\right), \left(x'',y''\right) &\in \mathbb{R}^2, \\ (x,y) &\leq \left(x',y'\right) \Rightarrow x \leq x\,' \text{ et } y \leq y\,' \\ \text{et } \left(x',y'\right) &\leq \left(x'',y''\right) \Rightarrow x' \leq x'' \text{ et } y' \leq y'' \\ &\Rightarrow x \leq x'' \text{ et } y \leq y'' \\ &\Rightarrow (x,y) \leq \left(x'',y''\right) \Rightarrow \leq \text{ est transitive} \end{aligned}$$

conclusion: $\leq$ est une relation d'ordre qui est partiel car pour les deux couples:

$(2,3)$ et $(4,1)$ on a ni $(2,3) \leq (4,1)$ ni $(4,1) \leq (2,3)$.

(2) Préciser deux minorants, deux majorants, bornes inférieure et supérieure de la partie:

$$A = \{(1,2),\ (3,1)\}.$$

$$(M_1, M_2) \text{ est un majorant de } A \Rightarrow \forall (x,y) \in A, (x,y) \leq (M_1, M_2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (1,2) \leq (M_1, M_2) \Rightarrow 1 \leq M_1 \text{ et} \\ (3,1) \leq (M_1, M_2) \Rightarrow 3 \leq M_1 \text{ et} \\ \Rightarrow (M_1, M_2) \in \mathbb{R} \text{ avec } 3 \leq M_1 \text{ et} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow SupA = (3,2) \notin A \Rightarrow MaxA$ n'existe pas.

$$(m_1, m_2) \text{ est un minorant de } A \Rightarrow \forall (x,y) \in A, (m_1, m_2) \leq (x,y) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (m_1, m_2) \leq (1,2) \Rightarrow m_1 \leq 1 \text{ et } m_2 \\ (m_1, m_2) \leq (3,1) \Rightarrow m_1 \leq 3 \text{ et } m \\ \Rightarrow (m_1, m_2) \in \mathbb{R} \text{ avec } m_1 \leq 1 \text{ et } m_2 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow InfA = (1,1) \notin A \Rightarrow MinA$ n'existe pas.

Exercice 08: On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation S par:

$$a \; S \; b \Leftrightarrow \quad a \leq b+1$$

(1) Vérifier que $0 \; S \; 1$ et $1 \; S \; 0$.Donner une conclusion?

$0 \leq 1+1 \Rightarrow 0 \; S \; 1$et $1 \leq 0+1 \Rightarrow 1 \; S \; 0$ alors la relation n'est pas antisymétrique.

(2) Soit R la relation définie sur $\mathbb{Z}$ par:

$$a \; R \; b \Leftrightarrow \quad a \quad \langle \; b+1$$

Montrons que R est une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$.

a) R **est-elle réflexive?**

R est réflexive$\Leftrightarrow$ $\forall a \in \mathbb{Z}, \;\; a \; R \; a$?

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \quad a \quad \langle \;\; a+1 \Rightarrow \;\; aRa \Rightarrow R \text{ est réflexive}$$

b) R **est-elle antisymétrique?**

R est antisymétrique$\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathbb{Z}, \qquad a \; Rb \quad$ et $b \; Ra \Rightarrow \;\; a = b$?

$$\begin{aligned}
\text{soient } a, b \quad &\in \quad \mathbb{Z}, \;\; \text{si } aRb \;\; \text{et} \quad bRa \Rightarrow \;\; a \quad \langle \;\; b+1 \\
\text{et } b \quad \langle \;\; a+1 \quad &\Rightarrow \quad (a-b) < (b-a) \\
&\Rightarrow \quad (a-b) \cdot 1 < (a-b) \cdot (-1) \\
\text{alors si } \; (a-b) \quad &\neq \quad 0 \Rightarrow 1 < (-1) \;\; \text{(contradiction)} \\
&\Rightarrow \quad a = b \Rightarrow R \text{ est antisymétrique.}
\end{aligned}$$

c) R **est-elle transitive?**

Φest transitive$\Leftrightarrow$ $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}, a\ R\ b$ et $b\ R\ c \Rightarrow a\ R\ c$?

$$\begin{array}{rcl} \text{soient } a,b,c & \in & \mathbb{Z}, \\ a\ R\ b \text{ et } b\ R\ c & \Rightarrow & a \ \langle\ b+1 \Rightarrow a \leq b \\ \text{et } b \ \langle\ c+1 & \Rightarrow & b \leq c \Rightarrow a \leq c \\ & \Rightarrow & a < c+1 \Rightarrow R \text{ est transitive} \end{array}$$

Conclusion: R est une relation d'ordre.

Chapitre 3

Les applications

3.1 NOTION D'APPLICATION

Étant donné deux ensembles E et F on définit une application de E dans F en se donnant une règle permettant de faire correspondre à tout élément de E un élément déterminer de F. Cette règle est considérée comme un opérateur, noté $f, T, ...$ Si $a \in E$, $f\ (a)$ désigne le transformé de a et représente donc un élément de F, et on note:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad E \to F \\ x \quad &\longmapsto \quad f\ (x) = y \end{aligned}$$

On dit que y est fonction de x. E est l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée. L'élément y associé à x est l'image de x par f.

Exemple 3.1

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto \quad f\ (x) = 6x + 3 \end{aligned}$$

3.2 ÉGALITÉ DE DEUX APPLICATIONS

Pour montrer que deux applications f et g sont égales, on montre qu'elles ont le même ensemble de départ E, et le même ensemble d'arrivée F et que

$$\forall x \in E, f\ \ (x) = g(x)$$

Exemple 3.2 *Soit E un ensemble. Pour toute partie X de E, on note φ_X l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par:*

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in X \\ 0 & si\ non \end{cases}$$

φ_X est appelée application caractéristique de X.

Exemple 9 *Montrons que:*

$$\forall A, B \in P(E), \varphi_{A\cap B} = \varphi_A \cdot \varphi_B$$

En effet:

On sait que $\varphi_{A\cap B}$ et $\varphi_A \cdot \varphi_B$ ont même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivé $\{0, 1\}$, il suffit de montrer que:

$$\forall t \in E, \varphi_{A\cap B}(t) = (\varphi_A \cdot \varphi_B)(t)$$

On distingue les cas suivants:

★ *si $t \in (A \cap B) \Rightarrow \varphi_{A\cap B}(t) = 1$, et $(\varphi_A \cdot \varphi_B)(t) = (\varphi_A)(t) \cdot (\varphi_B)(t) = 1 \cdot 1 = 1$ (car $t \in A$ et $t \in B$),*

★ *si $t \in (A \setminus B) \Rightarrow \varphi_{A\cap B}(t) = 0$, et $(\varphi_A \cdot \varphi_B)(t) = (\varphi_A)(t) \cdot (\varphi_B)(t) = 1 \cdot 0 = 1$ (car $t \in A$ et $t \notin B$),*

★ *si $t \in (B \setminus A) \Rightarrow \varphi_{A\cap B}(t) = 0$, et $(\varphi_A \cdot \varphi_B)(t) = \mathbb{N}(\varphi_A)(t) \cdot (\varphi_B)(t) = 0 \cdot 1 = 1$ (car $t \notin A$ et $t \in B$),*

★ *si $t \notin (A \cup B) \Rightarrow \varphi_{A\cap B}(t) = 0$, et $(\varphi_A \cdot \varphi_B)(t) = (\varphi_A)(t) \cdot (\varphi_B)(t) = 0 \cdot 0 = 0$ (car $t \notin A$ et $t \notin B$).*

Donc, pour tout $t \in E, \varphi_{A\cap B}(t) = (\varphi_A \cdot \varphi_B)(t)$
et par suite $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A \cdot \varphi_B$.

3.3 COMPOSÉE DE DEUX APPLICATIONS

Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et g une application de F dans un ensemble G. Alors le composée de ces deux application est

$$\begin{array}{rcl} g\circ f & : & E \to G \\ x & \mapsto & (g\circ f)\ (x) = g\left(f\ (x)\right) \end{array}$$

Exemple 3.3

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x & \mapsto & f\ (x) = 2x \end{array} \qquad \begin{array}{c} et\ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto g\ (x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si\ x\ \ est\ pair \\ \frac{x+1}{2} & si\ x\ \ est\ impair \end{cases} \end{array}$$

Alors:

$$\begin{array}{rcl} f\circ g & : & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x & \mapsto & f\ (g\ (x)) \ = \begin{cases} x & si\ x\ \ est\ pair \\ x+1 & si\ x\ \ est\ impair \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} et\ g\circ f & : & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x & \mapsto & g\left(f\ (x)\right) \ = g\left(2x\right) = x \quad car\ 2x = y\ \ est\ un\ entier\ pair \end{array}$$

Remarque 3.1 *Dans le cas général:*

$$g\circ f \neq f\circ g \qquad (voir\ l'exemple).$$

3.4 IMAGE D'UNE PARTIE

Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A une partie de E. Alors l'image de A par f est définie par:

$$f\ (A) = \{f\ (x), x \in A\}$$

Exemple 3.4

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \quad &\mapsto \quad f\ (x) = |x| \quad \textit{et } A = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3\} \end{aligned}$$

On a donc:

$$f\ (A) = \{1, , 2, 3\}$$

3.5 INJECTIVITÉ

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F. Par définition:

$$\begin{aligned} f \text{ est } \textbf{injective} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\ (x_1) \neq f\ (x_2) \\ \text{ou bien} \quad &: \quad f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \ \ \text{(le contraposé)} \end{aligned}$$

Exemple 3.5

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad \textit{et } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \\ x \quad &\mapsto \quad f\ (x) = 2x \qquad\qquad x \mapsto g\ (x) = \ |x| \end{aligned}$$

Alors:

$$f \textit{ est injective car: } \quad \forall x_1, x_2 \in \ \mathbb{R}, x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow f\ (x_1) \neq f\ (x_2)$$

mais g n'est pas injective car par exemple : $2 \neq -2$ *mais* $f\ (2) = f\ (-2)$.

3.6 SURJECTIVITÉ

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.Alors:

$$f \text{ est } \textbf{surjective} \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E \text{ tel que: } f\ (x) = y$$

c'est à dire chaque élément de l'ensemble d'arrivé admet un antécédent.

Exemple 3.6

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\ (x) = |x| \end{array} \qquad \begin{array}{c} et\ g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ x \mapsto g\ (x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & si\ x\ est\ pair \\ \frac{x+1}{2} & si\ x\ est\ impair \end{cases} \end{array}$$

Alors:

$$\begin{array}{rcl} f\ n'est\ pas\ surjective\ car\ si\ y & \in & \mathbb{R}^-, \forall x \in \mathbb{R}, :\ f\ (x) = |x| \neq y, \\ mais\ g\ est\ surjective\ car & : & \forall y \in \mathbb{N}, \exists x = 2y \in \mathbb{N}\ avec \\ f\ (x) & = & f\ (2y) = \frac{2y}{2} = y \end{array}$$

3.7 BIJECTIVITÉ

Soit f une application d'un ensemble E dans un ensemble F.Alors:

$$f \text{ est } \textbf{bijective} \Leftrightarrow f \text{ est injective et surjective.}$$

$$\Leftrightarrow \forall y \in F, \exists! x \in E \text{ tel que: } f\ (x) = y$$

Exemple 3.7

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & f\ (x) = |x| \end{array}$$

Exemple 10 *f est bijective.*

3.8 BIJECTION RÉCIPROQUE

Soit f une application bijective d'un ensemble E dans un ensemble F. Alors l'application réciproque f^{-1} est définie de F dans E, qui a pour chaque élément y, on associe un élément unique x.

Exemple 3.8

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f\ (x) = 3x + 5 \end{aligned}$$

Exemple 11

$$\begin{aligned} y &= 3x + 5 \Rightarrow x = \frac{y-5}{3} \\ &\Rightarrow f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y &\mapsto \frac{y-5}{3} \end{aligned}$$

3.9 IMAGE RÉCIPROQUE D'UNE PARTIE

Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et B une partie de E. Alors l'image réciproque de B par f est définie par:

$$f\ (B) = \{x \in E,\ f\ (x) \in B\}$$

Exemple 3.9

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto f\ (x) = |x| \quad et\ B = \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

On a donc:

$$f^{-1}\ (B) = \{1, , 2, 3\}$$

3.10 INVOLUTION

une **involution** est une bijection d'un ensemble E sur lui-même, qui est égale son inverse, c'est à dire:

$$\begin{aligned}\forall x \in E \qquad f(x) &= f^{-1}(x) \\ \Rightarrow f[f(x)] &= x \text{ ou bien: } f \circ f = I\end{aligned}$$

$$\text{ou } I \text{ est l'application identité} : \forall x \in E \qquad I(x) = x.$$

3.11 PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS

Si $A, B \in P(E)$ alors:

$$\begin{aligned} A &\subset B \Rightarrow f(A) = f(B) \\ \text{En effet: si } & \quad y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A \text{ tel que, } f(x) = y \\ &\Rightarrow \exists x \in B \text{ tel que, } f(x) = y \text{ car: } A \subset B \\ &\Rightarrow y \in f(B) \Rightarrow f(A) \subset f(B). \\ \text{de même pour } &: f(B) \subset f(A). \end{aligned}$$

et on a:

$$\begin{aligned} f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B) \\ f(A \cap B) &\subset f(A) \cap f(B) \end{aligned}$$

L'égalité n'ayant lieu que si f est injective.

Exemple 3.10

$$\begin{aligned} A &= \{0,\pi\}, B=\{0,3\pi\} \ \ et\ f\ (x)=\cos x \\ &\Rightarrow\ f\ (A)=\{1,-1\}, f\ (B)=\{1,-1\} \\ f\ (A\cap B) &= \{1\} \quad et\ f\ (A)\cap f\ (B)=\{1,-1\} \\ &\Rightarrow\ f\ (A)\cap f\ (B)\subsetneq f\ (A\cap B)\ \ (f\ n'est\ pas\ injective). \end{aligned}$$

3.12 Exercices

Exercice 01: Soit E un ensemble. Pour toute partie X de E, on note φ_X l'application de E dans $\{0,1\}$ définie par:

$$\forall t\in E, (\varphi_X\ (t)=1)\Leftrightarrow (t\in X).$$

φ_X est appelée application caractéristique de X.

(1) Montrer que: $\forall A,B\in P(E),\ \ \varphi_{A\cap B}\ =\varphi_A\ .\varphi_B\ .$

(2) En déduireque: $\varphi_A\ =(\varphi_A\ )^2.$

(3) $\varphi_{\bar{A}}\ =1-\varphi_A\ .$

(4) $\varphi_{A\cup B}\ =\varphi_A\ +\varphi_B\ -\varphi_A\ .\varphi_B\ .$

Exercice 02: On considère les deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies pour tout $x\in\mathbb{N}$, respectivement par:

$$f\ \ (x)=2x,\quad g\ \ (x)=\begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminer les applications $u=g\circ f$ et $v=f\circ g$.

Exercice 03: $f:E\to F$ une application, $A\subseteq E$ et $B\subseteq E$.

(1) Montrer que: $f\ (A\cup B)=f\ (A)\cup f\ (B)$.

(2) **a)** Montrer que: $f\ (A\cap B)\subset f\ (A)\cap f\ (B)$.

b) Donner un exemple pour lequel $f\ (A\cap B)\neq f\ (A)\cap f\ (B)$.

c) Montrer que si f est injective alors: $f\ (A \cap B) = f\ (A) \cap f\ (B)$.

Exercice 04:

(1) Montrer que f de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ définie par:

$$f \quad (x) = \frac{x}{1\ +\ |x|} \text{ est bijective et déterminer sa réciproque.}$$

(2) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[-1, 1]$ définie par:

$$f\ (x) = \sin(\pi x)$$

a) Cette application est-elle injective? est-elle surjective? est-elle bijective?

b) Montrer que la restriction de f à $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ est une bijection de $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ sur $]-1, 1[$.

Exercice 05: Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$\begin{array}{lll} f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} & \text{b) } g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} & \text{c) } h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \dfrac{\sin x}{x} & x \mapsto |x| - [x] & x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$$

Exercice 06: Soit f de $[0, 1[$ dans$[1, +\infty[$ définie par:

$$f\ (x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(1) Montrer que f est une application et qu'elle est bijective.

(2) Définir alors l'application réciproque.

Exercice 07: Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $h\ (x) = \frac{4x}{x^2+1}$.

(1) Vérifier que pour tout réel a non nul on a: $h\ (a) = h\ \left(\frac{1}{a}\right)$.

l'application h est-elle injective? Justifier.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ par $f\ (x) = h\ (x)$.

a) Montrer que f est injective.

b) Vérifier que: $\forall x \in I, \ \ f\ (x) \leq 2.$

c) Montrer que f est une bijection de I sur $]0,2]$ et trouver $f^{-1}(x)$.

Exercice 08 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par: $f\ (x) = \frac{x}{x^2+1}$.

(1) Calculer $f\ (2)$ et $f\ \left(\frac{1}{2}\right)$. f est-elle injective?

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f\ (x) = 2$. f est-elle surjective?

(3) Déterminer $f\ (\mathbb{R})$.(Indication: utiliser $(x+1)^2 \geq 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$).

Exercice 09: Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

(1) Montrer que: $g \circ f$ est injective $\Rightarrow$ f est injective.

(2) Montrer que: $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow$ g est surjective.

(3) f et g sont bijectives $\Rightarrow g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{\ -1} \circ g^{-1}$.

Exercice 10: Soient E, F, G trois ensembles, on considère f et g deux applications quelconques de E dans F et h une application injective de F dans G. montrer que:

$$h \circ f \ = h \circ g \ \ \Rightarrow f = g \ .$$

Exercice 11 : Soient A et $B \in P\ (E)$ et $f : P\ (E) \ \to P\ (A) \times\ P\ (B)$ définie par:

$$f \ \ (X) = (X \cap A, \ X \cap B)\,.$$

(1) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

(2) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

(3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective.Déterminer $f^{\ -1}$.

3.13 Solution des exercices

Exercice 01: Soit E un ensemble. Pour toute partie X de E, on note φ_X l'application de E dans $\{0,1\}$ définie par:

$$\forall t \in E, (\varphi_X(t) = 1) \Leftrightarrow (t \in X).$$

φ_X est appelée application caractéristique de X.

(1) Montrons que: $\forall A, B \in P(E)$, $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A . \varphi_B$.

$\varphi_{A\cap B} : E \to \{0,1\}$ et $\varphi_A . \varphi_B : E \to \{0,1\}$ car: $0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ et $1 \cdot 1 = 1$.

Montrons alors que: $\forall t \in E$, $\varphi_{A\cap B}(t) = \varphi_A(t) . \varphi_B(t)$?

$$\varphi_{A\cap B}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in A \cap B \\ 0 \text{ si } t \notin A \cap B \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in A \text{ et } t \in B \\ 0 \text{ si } t \notin A \text{ ou } t \notin B \end{cases}$$

et $\varphi_A(t) . \varphi_B(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in A \text{ et } t \in B \\ 0 \text{ si } t \in A \text{ ou } t \notin B \\ 0 \text{si } t \notin A \text{ ou } t \in B \\ 0 \text{si } t \notin A \text{ ou } t \notin B \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in A \text{ et } t \in B \\ 0 \text{ si } t \notin A \text{ ou } t \notin B \end{cases} = \varphi_{A\cap B}(t) \Rightarrow$ $\varphi_{A\cap B} = \varphi_A . \varphi_B$.

(2) En déduireque: $\varphi_A = (\varphi_A)^2$.

On a: $\varphi_{A\cap A} = (\varphi_A)^2$d'après (1) mais: $\varphi_{A\cap A} = \varphi_A$ car: $A \cap A = A \Rightarrow \varphi_A = (\varphi_A)^2$.

(3) $\varphi_{\bar{A}} = 1 - \varphi_A$.

$$\varphi_{\bar{A}}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in \bar{A} \\ 0 \text{ si } t \notin \bar{A} \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in A \\ 1 \text{ si } t \notin A \end{cases} \text{ et } 1 - \varphi_A = \begin{cases} 1-1 \text{ si } t \in A \\ 1-0 \text{ si } t \notin A \end{cases} = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in A \\ 1 \text{ si } t \notin A \end{cases}$$

de plus: $\varphi_{\bar{A}}(t) : E \to \{0,1\}$ et $1 - \varphi_A : E \to \{0,1\} \Rightarrow \varphi_{\bar{A}} = 1 - \varphi_A$.

(4) $\varphi_{A\cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_A . \varphi_B$.

$$\varphi_{A\cup B} = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in A \cup B \\ 0 \text{ si } t \notin A \cup B \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in A \text{ ou } t \in B \\ 0 \text{ si } t \notin A \text{ et } t \notin B \end{cases}.$$

$$\varphi_A(t)+\varphi_B(t)-\varphi_A(t).\varphi_B(t)=\begin{cases} 1+0-0 \text{ si } t\in A \text{ et } t\notin B \\ 0+1-0 \text{ si } t\notin A \text{ ou } t\in B \\ 0+0-0 \text{si } t\notin A \text{ ou } t\notin B \\ 1+1-1 \text{si } t\in A \text{ ou } t\in B \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ si } t\in A \text{ ou } t\in B \\ 0 \text{ si } t\notin A \text{ et } t\notin B \end{cases} =$$

$\varphi_{A\cup B}(t)$.

et on a: $\varphi_{A\cup B}: E\to\{0,1\}$ et $\varphi_A(t)+\varphi_B(t)-\varphi_A(t).\varphi_B(t): E\to\{0,1\}$

$\Rightarrow \varphi_{A\cup B}=\varphi_A+\varphi_B-\varphi_A.\varphi_B$.

Exercice 02: On considère les deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies pour tout $x\in\mathbb{N}$, respectivement par:

$$f(x)=2x,\quad g(x)=\begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

Déterminons les applications $u=g\circ f$ et $v=f\circ g$.

$u:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$x\mapsto u(x)=g\circ f(x)=g[f(x)]=g(2x)=\frac{2x}{2}=x.$

et $v:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$$x\mapsto v(x)=f\circ g(x)=f[g(x)]=\begin{cases} f\left(\frac{x}{2}\right) \text{ si } x \text{ est pair} \\ f\left(\frac{x+1}{2}\right) \text{ si } x \text{ est impair}\end{cases}=\begin{cases} x \text{ si } x \text{ est pair} \\ x+1 \text{ si } x \text{ est impair}\end{cases}\neq$$

$g\circ f(x)$.

Exercice 03: $f:E\to F$ une application, $A\subseteq E$ et $B\subseteq E$.

(1) Montrons que: $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

a) $f(A\cup B)\subset f(A)\cup f(B)$?

Soit $y\in f(A\cup B)\Rightarrow \exists x\in A\cup B$ tel que: $f(x)=y$

$\Rightarrow$ $\exists x\in A$ ou $\exists x\in B$ tel que: $f(x)=y$

$\Rightarrow$ ($\exists x\in A$ tel que: $f(x)=y$) ou ($\exists x\in B$ tel que: $f(x)=y$)

$\Rightarrow y\in f(A)$ ou $y\in f(B)$ $\Rightarrow y\in f(A)\cup f(B)$.

b) $y\in f(A)\cup f(B)\Rightarrow y\in f(A)$ ou $y\in f(B)$

$\Rightarrow$ ($\exists x\in A$ tel que: $f(x)=y$) ou ($\exists x\in B$ tel que: $f(x)=y$)

$\Rightarrow \exists x\in A$ ou $\exists x\in B$ tel que: $f(x)=y$

$\Rightarrow \exists x\in A\cup B$ tel que: $f(x)=y\Rightarrow y\in f(A\cup B)$.

(2) **a)** Montrons que: $f\ (A \cap B) \subset f\ (A) \cap f\ (B)$.

Soit $y \in\ f\ (A \cap B) \Rightarrow \exists x \in\ A \cap B$ tel que: $f\ (x) = y$

$\Rightarrow\ \exists x \in\ A$et $\exists x \in B$ tel que: $f\ (x) = y$

$\Rightarrow\ (\ \exists x \in\ A$ tel que: $f\ (x) = y)$ et $(\exists x \in B$ tel que: $f\ (x) = y)$

$\Rightarrow y \in f\ (A)$ et $y \in f\ (B)\ \Rightarrow y \in\ f\ (A) \cap f\ (B)$.

b) Donner un exemple pour lequel $f\ (A) \cap f\ (B) \subset f\ (A \cap B)$.

1. On pose: $A = \{0, 1\}$ et $B = \{0, -1\}$ avec: $f\ (x) = |x|$.

$f\ (A) = \{0, 1\}$ et $f\ (B) = \{0, 1\} \Rightarrow f\ (A) \cap f\ (B) = \{0, 1\}$

et $A \cap B = \{0\} \Rightarrow f\ (A \cap B) = \{0\}$

conclusion: $f\ (A) \cap f\ (B) \subset f\ (A \cap B)$.

c) Montrer que si f est injective alors: $f\ (A \cap B) = f\ (A) \cap f\ (B)$.

Il suffit de montrer que: $f\ (A) \cap f\ (B) \subset f\ (A \cap B)$

$y \in\ f\ (A) \cap f\ (B) \Rightarrow y \in f\ (A)$ et $y \in f\ (B)$

$\Rightarrow (\ \exists x_1 \in\ A$ tel que: $f\ (x_1) = y)$ et $(\exists x_2 \in B$ tel que: $f\ (x_2) = y)$

et puisque f est injective alors: $x_1 = x_2 = x$

$\Rightarrow \exists x \in\ A$ et $\exists x \in B$ tel que: $f\ (x) = y$

$\Rightarrow \exists x \in\ A \cap B$ tel que: $f\ (x) = y \Rightarrow y \in\ f\ (A \cap B)$.

Exercice 04:

(1) Montrer que f de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ définie par:

$$f\ \ (x) = \frac{x}{1\ +\ |x|} \text{ est bijective et déterminer sa réciproque.}$$

a) f est elle injective?

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si $f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$?

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si $f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1\ +\ |x_1|} = \frac{x_2}{1\ +\ |x_2|}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} \text{ si } x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \text{ si } x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \leq 0 \\ \text{ne convient pas que dans le cas où } x_1, x_2 \text{ ont le même signe} \\ \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} \text{ si } x_1 \leq 0 \text{ et } x_2 \geq 0 \\ \text{ne convient pas que dans le cas où } x_1, x_2 \text{ ont le même signe} \\ \frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \text{ si } x_1 \leq 0 \text{ et } x_2 \leq 0 x_1 = x_2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow f \text{ est}$$

injective.

b) f est elle surjective?

Montrons que: $\forall y \in \left]-1,1\right[, \exists x \in \mathbb{R}$ tel que: $f\ (x) = y$

· Si $y \in \left]-1,0\right[\Rightarrow x < 0 \Rightarrow \frac{x}{1-x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} < 0$ qui existe si: $y \in \left]-1,0\right[$

· Si $y \in \left[0,1\right[\Rightarrow x > 0 \Rightarrow \frac{x}{1+x} = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} < 0$ qui existe si: $y \in \left[0,1\right[$

conclusion: f est une application bijective avec:

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad &: \quad \left]-1,1\right[\to \mathbb{R} \\ y \quad &\mapsto \quad \begin{cases} \frac{y}{1-y} \text{ si } y \in \left[0,1\right[\\ \frac{y}{1+y} \text{ si } y \in \left]-1,0\right[\end{cases} . \end{aligned}$$

(2) Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[-1,1]$ définie par:

$$g\,(x) = \sin\,(\pi x)$$

a) Cette application est-elle injective? est-elle surjective? est-elle bijective?

1) g n'est pas injective car: si $x_1 = 0$ et $x_2 = 2$; $x_1 \neq x_2$ mais: $g\,(x_1) = g\,(x_2) = 0$.

2) $-1 \leq \sin\,(\pi x) \leq 1 \Rightarrow G$ est surjective

3) g n'est pas bijective car elle n'est pas injective.

b) Montrer que la restriction de g à $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ est une bijection de $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ sur $\left]-1,1\right[$.

Soit h la restriction de g à $\left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[\Rightarrow h : \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[\to \left]-1,1\right[x \in$

$$x \mapsto h\,(x) = \sin\,(\pi x)$$

1) h est surjective car: si $x \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[\Rightarrow -1 < \sin\,(\pi x) < 1$.

2) il reste à montrer que: h est injective?

Soient $x_1, x_2 \in \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, si $h\,(x_1) = h\,(x_2) \Rightarrow \sin\,(\pi x_1) - \sin\,(\pi x_2) = 0$

$\Rightarrow 2\sin\left(\pi\frac{(x_1-x_2)}{2}\right)\cos\left(\pi\frac{(x_1+x_2)}{2}\right)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\pi\frac{(x_1-x_2)}{2}\right)=0 \Rightarrow x_1=x_2 \\ \cos\left(\pi\frac{(x_1+x_2)}{2}\right)=0 \Rightarrow x_1+x_2=1 \text{ cas qui n'est pas possible.} \end{cases} \Rightarrow h$ est injective$\Rightarrow h$ est bijective.

Exercice 05: Les applications suivantes sont elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$\text{a) } f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{x} \qquad \text{b) } g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto |x|-[x] \qquad \text{c) } h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto \sqrt{x}$$

a)- f n'est pas injective car: $x_1 = 2\pi, x_2 = 4\pi$, $x_1 \neq x_2$ mais $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

- Pour surjective: si on pose l'application $h(x) = \sin x - x \Rightarrow h'(x) = \cos x - 1 \Rightarrow h'(x) \leq 0 \Rightarrow h$ est décroissante

$\Rightarrow$ le seul cas pour que $h(x) = 0$ quand $x = 0$ donc pour $y = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^*, \sin x \neq x \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \neq 1 \Rightarrow f(x) \neq 1$

Alors f n'est pas surjective.

b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$x \mapsto |x| - [x]$

$[x]$ désigne la partie entière qui est paer définition: $\max y$ avec $y \in \mathbb{Z}$ et $y \leq x$.

- g n'est pas injective car: $x_1 = 1, x_2 = 2$, $x_1 \neq x_2$ mais $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

- Pour surjective: on a pour $x \in \mathbb{Z}^+, g(x) = 0$ et si $x \in \mathbb{Z}^-, g(x) = -x - x = -2x \in \mathbb{N}$ est qui pair

$\Rightarrow \forall y = 2k+1$ (impair)$, \forall x \in \mathbb{Z}$, $g(x) \neq y$. Alors g n'est pas surjective.

c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$x \mapsto \sqrt{x}$

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+, h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$ car h est strictement croissante$\Rightarrow h$ est injective.

Pour surjective: $\forall y \in \mathbb{R}^+, \exists x \in \mathbb{R}^+$ tel que: $y = \sqrt{x}$ (il suffit de prendre $x = y^2$)$\Rightarrow h$ est surjective$\Rightarrow h$ est bijective.

Exercice 06: Soit f de $[0,1[$ dans$[1,+\infty[$ définie par:

$$f\ (x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(1) Montrer que f est une application et qu'elle est bijective.

f est une application $\Leftrightarrow \forall x\in[0,1[\,,\exists y\in[1,+\infty[$ tel que: $f\ (x)=y$?

$f\ '\ (x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\geq 0$ car $x\in[0,1[\ \Rightarrow f$ est croissante en plus on a: $f\ (0)=1$ et $\lim\limits_{x\to 1} f\ (x)=+\infty$

$\Rightarrow f\ [0,1[\ =[1,+\infty[$ d'où f est une application.

- f est injective car: $\forall x_1,x_2\in[0,1[\ ,f\,(x_1)=f\,(x_2)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x_2^2}}\Rightarrow x_1^2=x_2^2\Rightarrow x_1=x_2$.

- f est surjective car: $\forall y\in[1,+\infty[\ ,\exists x\in[0,1[$ tel que: $f\ (x)=y\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=y\Rightarrow x=\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}\in[0,1[$car $y\geq 1$.

(2) Alors l'application réciproque est:

$$\begin{aligned} f^{-1}\quad &:\quad [1,+\infty[\ \to[0,1[\\ y\quad &\mapsto\quad f^{-1}\,(y)=\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}.\end{aligned}$$

Exercice 07: Soit h l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $h\ (x)=\frac{4x}{x^2+1}$.

(1) Vérifier que pour tout réel a non nul on a: $h\ (a)=h\ \left(\frac{1}{a}\right)$.

$h\ (a)-h\ \left(\frac{1}{a}\right)=\frac{4a}{a^2+1}-\frac{4\frac{1}{a}}{\left(\frac{1}{a}\right)^2+1}=0\Rightarrow h\ (a)=h\ \left(\frac{1}{a}\right)$.

1. l'application h est-elle injective? Justifier.

h n'est pas injective car pour: $x_1=2$ et $x_2=\frac{1}{2}$ on a: $x_1\neq x_2$ mais d'après (1) $h\ (2)=h\ \left(\frac{1}{2}\right)$.

(2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I=[1,+\infty[$ par $f\ (x)=h\ (x)$.

a) Montrons que f est injective:

Montrons que: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, si $f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$?

En effet: si $f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow \frac{4x_1}{x_1^2+1} = \frac{4x_2}{x_2^2+1} \Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ou $x_1 = \frac{1}{x_2}$ cas qui n'est pas possible

pour: $x_1, x_2 \in [1, +\infty[$ sauf si $x_1 = x_2 \Rightarrow f$ est injective.

1. **b)** Vérifier que: $\forall x \in I,\ \ f\ (x) \leq 2.$

$f\ (x) - 2 = \frac{-2(x-1)^2}{1+x^2} \leq 0 \Rightarrow f\ (x) \leq 2.$

1. **c)** Montrer que f est une bijection de I sur $]0, 2]$ et trouver $f^{-1}(x)$.

On a: f est injective en plus:

- f est surjective car: $\forall y \in\ ]0, 2]\ , \exists x \in [1, +\infty[$ tel que: $f\ (x) = y \Rightarrow \frac{4x}{x^2+1} = y \Rightarrow yx^2 - 4x + y = 0$

$\triangle = 16 - 4y^2 \geq 0$ car: $y \in\ ]0, 2] \Rightarrow x_1 = 2 + 2\sqrt{4 - y^2}$ ou $x_2 = 2 - 2\sqrt{4 - y^2}$ une solution qui ne convient pas

$\Rightarrow x = 2 + 2\sqrt{4 - y^2}$ qui existe $\forall y \in\ ]0, 2] \Rightarrow f$ est bijective.

(2) Alors l'application réciproque est:

$$\begin{aligned} f^{-1} \quad &: \quad]0, 2] \rightarrow [1, +\infty[\\ y \quad &\mapsto \quad f^{-1}(y) = 2 + 2\sqrt{4 - y^2}. \end{aligned}$$

Exercice 08 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par: $f\ (x) = \frac{x}{x^2+1}$.

(1) Calculer $f\ (2)$ et $f\ \left(\frac{1}{2}\right)$. f est-elle injective?

$f\ (2) = f\ \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} \Rightarrow f$ n'est pas injective car: $x_1 \neq x_2$ mais $f\ (2) = f\ \left(\frac{1}{2}\right)$.

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f\ (x) = 2$. f est-elle surjective?

$f\ (x) = 2 \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} = 2 \Leftrightarrow 2x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow \triangle = -15 < 0 \Rightarrow$ l'ensemble des solutions est vide $(\emptyset)$.

Donc pour $y = 2, \forall x \in \mathbb{R}; f\ (x) \neq 2 \Rightarrow f$ n'est surjective

(3) Déterminer $f\ (\mathbb{R})$.(Indication: utiliser $(x+1)^2 \geq 0$ et $(x-1)^2 \geq 0$).

on a: $(x+1)^2 \geq 0$ et $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+1 \geq -2x$ et $x^2+1 \geq 2x \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f$ $(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Exercice 09: Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications.

(1) Montrer que: $g \circ f$ est injective $\Rightarrow$ f est injective.

Supposons par l'absurde que f n'est pas injective$\Rightarrow \exists x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2$ et $f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow g\left[f\ (x_1)\right] = g\left[f\ (x_2)\right]$

car g est une application alors $g \circ f\ (x_1) = g \circ f\ (x_2) \Rightarrow g \circ f$ n'est pas injective. (contradiction)$\Rightarrow$ f est injective.

(2) Montrer que: $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow$ g est surjective.

$g \circ f$ est surjective$\Rightarrow \forall z \in G, \exists x \in E$ tel que: $g \circ f\ (x) = z \Rightarrow g\left[f\ (x)\right] = z \Rightarrow \exists y = f\ (x) \in F$ car f est une application et $g\ (y) = z$

alors g est surjective.

(3) f et g sont bijectives $\Rightarrow g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{\ -1} \circ g^{-1}$.

Si f et g sont bijectives. Montrons alors que:$g \circ f$ est injective ensuite qu'elle est surjective?

Pour injective:

Soient $x_1, x_2 \in E$ avec $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\ (x_1) \neq f\ (x_2)$ car f est injective$\Rightarrow g\left[f\ (x_1)\right] \neq g\left[f\ (x_2)\right]$car g est injective$\Rightarrow g \circ f$ est injective .

Pour surjective:

$\forall z \in G, \exists y \in F$ tel que: $g\ (y) = z$ car g est surjective$\Rightarrow \exists x \in E$ tel que: $g\left[f\ (x)\right] = z$ car f est surjective$\Rightarrow g \circ f\ (x) = z \Rightarrow g \circ f$ est surjective.

En plus si ona: $h \circ k = Id \Rightarrow k = h^{-1}$, ce qui fait pour notre exercice: $(g \circ f)^{-1} = \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ Id \circ f = Id \Rightarrow (g \circ f)^{-1} = f^{\ -1} \circ g^{-1}$.

Exercice 10: Soient E, F, G trois ensembles, on considère f et g deux applications quelconques de E dans F et h une application injective de F dans G. montrer que:

$$h \circ f = h \circ g \Rightarrow f = g .$$

Par l'absurde: supposons que: $f \neq g \Rightarrow \exists x \in E$ et $f\ (x) \neq g\ (x) \Rightarrow \exists x \in E$ tq: h $[f\,(x)] \neq h\ [g\,(x)]$ car h est injective

$\Rightarrow \exists x \in E$ tq: $h \circ f\,(x) \neq h \circ g\,(x) \Rightarrow h \circ f\ \neq h \circ g$

Exercice 11 : Soient A et $B \in P\ (E)$ et $f : P\ (E)\ \ \rightarrow P\ (A) \times\ P\ (B)$ définie par:

$$f\ \ (X) = (X \cap A,\ X \cap B)\,.$$

(1) Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

"$\Rightarrow$ "hyp: f est injective

Pb: $A \cup B = E$

"$\subset$ " evident car A et $B \in P\ (E)\,.$

"$\supset$ "Par l'absurde supposons que E n'est pas inclu dans $A \cup B$ alors: $\exists x \in E$ et $x \notin A \cup B$

$\Rightarrow \exists x \in E$ et $x \notin A$ et $x \notin B \Rightarrow \{x\} \cap A = \{x\} \cap B = \emptyset \Rightarrow f\ \ (\{x\}) = (\{x\} \cap A,\ \ \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset) = f\ \ (\emptyset)$ avec $\emptyset \neq \{x\}$

$\Rightarrow f$ n'est pas injective (contradiction), ce qui implique que: $A \cup B = E$.

" $\Leftarrow$ "hyp: $A \cup B = E$

Pb: f est injective

Soient $X_1, X_2 \in P\,(E)$ avec $f\ (X_1) = f\ (X_2)$

$\Rightarrow (X_1 \cap A,\ X_1 \cap B) = (X_2 \cap A,\ X_2 \cap B) \Rightarrow X_1 \cap A = X_2 \cap A$ et $X_1 \cap B = X_2 \cap B$

$\Rightarrow (X_1 \cap A) \cup (X_1 \cap B) = (X_2 \cap A) \cup (X_2 \cap B) \Rightarrow X_1 \cap (A \cup B) = X_2 \cap (A \cup B)$ (la distributivité)

$\Rightarrow X_1 \cap (E) = X_2 \cap (E) \Rightarrow X_1 = X_2 \Rightarrow f$ est injective.

(2) Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

"$\Rightarrow$ "hyp: f est surjective

Pb: $A \cap B = \emptyset$

"$\supset$ " evident car l'ensemble vide est inclu dans chaque ensemble.

"$\subset$ "Par l'absurde supposons que $A\cap B$ n'est pas inclu dans $\emptyset$ alors: $\exists x \in A\cap B \Rightarrow \{x\}\cap A = \{x\} = \{x\} \cap B$

Mais $(\{x\}, \emptyset) \in P(A) \times P(B)$ alors $\forall Y \in P(E)$ on a: $f(Y) = (Y \cap A,\ Y \cap B) \neq (\{x\}, \emptyset)$ car $x \in B$

$\Rightarrow f$ n'est pas surjective.

" $\Leftarrow$ "hyp: $A \cap B = \emptyset$

Pb: f est surjective

Supposons que f n'est pas surjective$\Rightarrow \exists (Y_1, Y_2) \in P(A) \times P(B)$ et $(Y_1, Y_2) \neq f(X), \forall X \in P(E)$

$\Rightarrow (Y_1, Y_2) \neq (X \cap A,\ X \cap B), \forall X \in P(E)$, en particulier si $X = Y_1 \cup Y_2$

$\Rightarrow (Y_1, Y_2) \neq ((Y_1 \cup Y_2) \cap A,\ (Y_1 \cup Y_2) \cap B)$,mais$Y_1 \in P(A)$, $Y_2 \in P(B)$ et $A \cap B = \emptyset$

$\Rightarrow (Y_1, Y_2) \neq (Y_1 \cap A, Y_2 \cap B) = (Y_1, Y_2) \Rightarrow$contradiction$\Rightarrow f$ est surjective.

(3) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective.Déterminer f^{-1}.

une condition nécessaire et suffisante pour que f soit bijective est: $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A = C_E^B$.

On a: $f(X) = (X \cap A,\ X \cap B) = (Y_1, Y_2) \in P(A) \times P(B)$

$\Rightarrow X \cap A = Y_1$ et $X \cap B = Y_2$ et puisque $A \cup B = E \Rightarrow f^{-1}(Y_1, Y_2) = X = Y_1 \cup Y_2$.

Chapitre 4

Suites numériques.

4.1 DÉFINITIONS

On appelle **suite d'éléments de** E une application d'un sous ensemble $A = \{n_0, n_0 + 1, \cdots\}$ de $\mathbb{N}$ vers E. On la note:

$$\begin{array}{ccc} u & : & A \to E \\ n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

u_n est appelé **terme général** de la suite u, que l'on note aussi $(u_n)_{n \geq n_0}$.

Considérons les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 1}$, définies par:

$$u_n = 2 + \frac{5}{n+1}, v_n = \sqrt{n+1}.$$

On deux types de suites:

1. Une suite définie par un terme général qui est défini par un indice n.

Exemple 12

$$u_n = \frac{1}{n^2+1}, v_n = \sin n.$$

2. Une suite récurrente:

C'est une suite qui est définie par une relation entre ces termes d'ordre $n, n-1, n+1, \cdots$

Exemple 13

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = \sqrt{u_{n-1} + 1}. \end{cases}$$

Remarque 14

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_n \Leftrightarrow u_n = v_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

4.2 QUELQUES CARACTÈRES DES SUITES

4.2.1 Suites monotones

Pour étudier la monotonie d'une suite on calcul la valeur suivante:

$$u_{n+1} - u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Donc on a les cas suivants:

1) si $u_{n+1} - u_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **croissante**.
2) si $u_{n+1} - u_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **strictement croissante**.
3) si $u_{n+1} - u_n \leq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **décroissante**.
4) si $u_{n+1} - u_n < 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **strictement décroissante**.
5) si $u_{n+1} - u_n = 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **constante**.

D'une autre manière on peut calculer la valeur:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = l \;\text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Alors on a:

1) si $l \geq 1, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **croissante**.

2) si $l > 1, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **strictement croissante**.

3) si $l \leq 1 \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **décroissante**.

4) si $l < 1 \ , \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **strictement décroissante**.

5) si $l = 1, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ alors la suite est dite **constante**.

Exemple 15

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2 - \frac{1}{u_{n-1}}. \end{cases}$$

Alors on a:

$$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n} < 0, \quad \forall \ n \in \mathbb{N} \ car \ u_n > 0.$$

donc la suite est décroissante.

4.2.2 Suites bornées

- Une suite (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

- Une suite (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq u_n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$.

- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est majorée et minorée à la fois.

Exemple 16

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2 - \frac{1}{u_{n-1}}. \end{cases}$$

Montrons par récurrence que:

$$u_n > 1, \quad \forall \ n \in \mathbb{N}$$

En effet: pour $n = 0$, on a:$u_0 = 2 > 1$.

Supposons que: $u_n > 1$ pour un n fixé et montrons que:$u_{n+1} > 1$.

on a:

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} > 2 - 1 = 1$$

Conclusion 17

$$u_n > 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \textit{c'est à dire } (u_n) \textit{ est minorée par } 1.$$

4.3 NATURE D'UNE SUITE

4.3.1 Suites convergentes

Définition 18 *Une suite* (u_n) *est dite* ***convergente*** *si sa limite* l *existe et elle est égale à une constante unique.*

Exemple 19

$$u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = 0.$$

4.3.2 Suites divergentes

Définition 20 *Une suite* (u_n) *est dite* ***divergente*** *si sa limite* l *est égale à l'infinie ou bien deux limites ou plus.*

Exemple 21

$$\begin{aligned} 1)\ u_n &= n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty. \\ 2)\ v_n &= (-1)^n \\ &= \begin{cases} 1 \ si\ n = 2k \\ -1 \ si\ n = 2k+1 \end{cases} k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

la limite n'existe pas car on a le cas d'indice pair et l'indice impair.

4.4 THÉORÈME FONDAMENTAUX

Proposition 22 *1) Une suite croissante majorée est une suite convergente.*

2) Une suite décroissante minorée est une suite convergente.

Exemple 23

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2 - \frac{1}{u_{n-1}}. \end{cases}$$

Proposition 24 *(u_n) est décroissante minorée par 1 ou bien 0, alors elle est convergente.*

Remarque 25 *Si on a une suite décroissante minorée par une constante α, ou bien croissante majorée par α, alors la limite n'est pas nécéssairement α.*

Exemple 26

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n = 2 - \frac{1}{u_{n-1}}. \end{cases}$$

(u_n) est décroissante minorée par$\alpha = 0$, donc pour déterminer la limite passant à la formule de récurrence:

$$\begin{aligned} u_n &= 2 - \frac{1}{u_{n-1}} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{u_{n-1}}\right) \\ &\Rightarrow l = 2 - \frac{1}{l} \Rightarrow l^2 - 2l + 1 = 0 \\ &\Rightarrow (l-1)^2 = 0 \Rightarrow l = 1 \neq \alpha. \end{aligned}$$

4.5 PROPRIÉTÉ FONDAMENTALES

1) Si (u_n) est convergente $\Rightarrow$ elle est bornée.

2)

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n = l \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} |u_n| = |l\ | .$$

3)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \ \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0.$$

4.6 THÉORÈME D'ENCADREMENT (RÈGLE DES DEUX GENDARMES)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes vers la même limite et (w_n) une suite telle que:

$$u_n \leq w_n \leq v_n \text{ ou bien } u_n < w_n < v_n$$

Alors la suite (w_n) est convergente sa limite est égale à l.

Exemple 27 *Dans un cercle unité on a:*

$$\begin{aligned} x \cos x &\leq \sin x \leq x \cdot 1 \\ &\Rightarrow \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \\ &\Rightarrow \lim_{x \to 0} \cos x \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \\ &\Rightarrow 1 \leq \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1 \\ &\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \end{aligned}$$

4.7 SOUS-SUITES

On appelle une **sous-suite (suite extraite ou bien suite partielle)** d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la suite (v_k) définie par:

$$v_k = u_{(s(k))}, \forall k \in \mathbb{N}$$

avec:

$$\begin{aligned} s &: \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ k &\mapsto s(k) \end{aligned}$$

est une application d'indice strictement croissante.

Exemple 28 *La suite* $(u_{2k})_{k \in \mathbb{N}}, \left(resp\, (u_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}}\right)$ *est une sous suite de* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4.8 Suites adjacentes:

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites deux suites adjacentes si et seulement si:

$$1)\ (U_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite croissante,}$$
$$2)\ (V_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante,}$$
$$3)\ \lim_{n\to+\infty}(V_n-U_n)=0,$$
$$4)\ U_n\leq V_n, \forall n\in\mathbb{N}.$$

4.9 Exercices:

Exercice 01: Calculer U_1, U_2 et U_3 dans les cas suivants:

$1) U_n = \frac{1}{n+1}\sin n\frac{\pi}{2}$ $\quad 2)\ U_n = \frac{5\times7\times9\times\cdots\times(5+2n)}{4\times7\times10\times\cdots\times(4+3n)}$ $\quad 3) U_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$.

Exercice 02: Calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}\right)$, 2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3+7}{n^2\sqrt{n^2+1}}$, 3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2+4}$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{5}}-n^{\frac{1}{6}}}$, 5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\sin n\frac{\pi}{2}$, 6) $\lim\limits_{n\to+\infty} n+\sqrt[3]{1-n^3}$, 7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}$

8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n+3^n}{a^n}, a\in\mathbb{R}$, 9) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3-\sin^2 n}$, 10) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3+2^n}{3^n}$.

Exercice 03: (U_n) est définie par: $U_n=\ln(1+U_{n-1})$ avec $U_0\rangle\ 0$ .Chercher la limite de U_n.

Exercice 04: **a)** Soit (U_n) une suite croissante, montrer que la suite $(V_n)=\frac{U_1+U_2+....+U_n}{n}$ est croissante.

b) Si (U_n) est une suite convergente peut-on en déduire que (V_n) l'est aussi.

Exercice 05: Posons $U_1=\frac{1}{4}, U_2=\frac{1.3}{4^2 2!}$ et $\forall n\geq 3, U_n=\frac{1.3.5....(2n-1)}{4^n.n!}$

Montrer l'inégalité $\frac{U_{n+1}}{Un}<\frac{1}{2}$. En déduire la limite de la suite (U_n) .

Exercice 06 : Soient $(U_n)_{n\geq 2}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ deux suites telles que:

$$U_n=\frac{n+7}{n-1} \quad \text{et } V_n=\frac{n+2}{n}$$

(1) Montrer que $(V_n)_{n\geq 1}$ est une sous-suite de $(U_n)_{n\geq 2}$.

(2) Soit $(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ une suite définie par $b_n = \frac{2-5^n}{3.5^n+1}$ trouver une suite $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ telle que b_n en soit extraite.

Exercice 07 : Soit q un nombre réel tel que $|q| \rangle 1$.**1)** Montrer que: $\lim\limits_{n\,\to+\infty} q^n = 0$.

2) Soit $S_n = q + q^2 + q^3 + ... + q^n$; calculer $(1-q)\,S_n$ puis $\lim\limits_{n\,\to+\infty} S_n$.

Exercice 08 : On considère la suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n} \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(1) Montrer que $U_n \rangle \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 0$ et que (U_n) est strictement décroissante.

(2) Calculer $\lim\limits_{n\,\to+\infty} U_n$.

(3) On pose $V_n = U_n - \sqrt{2}$. Montrer que: $V_{n+1} = \frac{(V_n)^2}{2U_n}$ et en déduire que: $V_{n+1} < \frac{(V_n)^2}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(4) Montrer que: $0 < V_n < \frac{1}{2^{2^n-1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 09 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ une suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \frac{4U_n\ + 2}{U_n\ + 5}, \qquad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) Pour quelles valeurs de$a$ la suite $(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ est-elle constante ?

(2) Montrer que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $U_{n_0} = -2$, alors $U_{n_0-1} = -2$.

(3) En déduire que si $U_0 \neq -2$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq -2$.

(4) On suppose que $U_0 \neq -2$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n\ - 1}{U_n\ + 2}$.

a) Vérifier que $(V_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

En déduire l'expression de U_n en fonction de n et de V_0.

Etudier alors la convergence de la suite $(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$.

Exercice 10: On considère la suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(1) Montrer que $U_n \rangle\ 0$ pour tout $n \geq 0$.

(2) On suppose que la suite U_n est convergente, quelle est la valeur l de sa limite ?

(3) Montrer que $U_n - l\ \rangle 0$ pour tout $n \geq 1$.(Remplacer l par sa valeur).

(4) En déduire que (U_n) est décroissante.

(5) Conclure.

Exercice 11 : Posons:

$$\forall n \geq 1 \quad X_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad Y_n = X_n + \frac{1}{n!}$$

Montrer que les suites $(X_n)_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\ \in\ \mathbb{N}}$ sont adjacentes et que leur limite commune est un nombre irrationnel.

Exercice 12 : Ėtant donné les nombres a et b vérifiant $0\ \langle a\ \langle\ b$, on considère les deux suites:

$$U_n = \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}} \text{ et } V_n = \frac{U_{n-1} + V_{n-1}}{2} \quad \text{avec } U_0 = a \quad \text{et} \quad V_0 = b$$

Montrer que ces deux suites convergent et admettent même limite.

4.10 Solutions des exercices:

Exercice 01: Calculer U_1, U_2 et U_3 dans les cas suivants:

1)$U_n = \frac{1}{n+1}\sin n\frac{\pi}{2} \Rightarrow U_1 = \frac{1}{2}, U_2 = 0$ et $U_3 = -\frac{1}{4}$

2) $U_n = \frac{5\times7\times9\times\cdots\times(5+2n)}{4\times7\times10\times\cdots\times(4+3n)} \Rightarrow U_1 = \frac{5\times7}{4\times7}, U_2 = \frac{5\times7\times9}{4\times7\times10}$ et $U_3 = \frac{5\times7\times9\times11}{4\times7\times10\times13}$

3)$U_n = \frac{1}{n^3}\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 \Rightarrow U_1 = 1, U_2 = \frac{5}{8}$ et $U_3 = \frac{14}{27}$

Exercice 02: Calculer les limites suivantes:

1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}\right)$, on a: $\frac{1}{n.(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n.(n+1)}\right)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3+7}{n^2\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{7}{n^3}\right)}{n^3\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2+4}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+9}-\sqrt{n^2+4}}{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2+4}}\left(\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2+4}\right)$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2+9-n^2-4}{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2+4}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{n^2+9}+\sqrt{n^2+4}}=0$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}-n^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{5}}-n^{\frac{1}{6}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{5}}}\frac{\left(1-n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\right)}{1-n^{\frac{1}{6}-\frac{1}{5}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{5}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{5}}=+\infty$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2}\sin n\frac{\pi}{2}$ n'existe pas car pour les deux sous suites:

$X_k=4k\to+\infty$ quand $k\to+\infty$ et $Y_k=4k+1\to+\infty$ quand $k\to+\infty$

mais: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{X_k}{2}\sin X_k\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\neq\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{Y_k}{2}\sin Y_k\left(\frac{\pi}{2}\right)=+\infty$ par contre si la limite existe elle est unique

6) $\lim\limits_{n\to+\infty}n+\sqrt[3]{1-n^3}$ on a: $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)\Rightarrow(a+b)=\frac{a^3+b^3}{(a^2-ab+b^2)}$

alors: $\lim\limits_{n\to+\infty}n+\sqrt[3]{1-n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3+1-n^3}{n^2-n(1-n^3)^{\frac{1}{3}}+(1-n^3)^{\frac{2}{3}}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2\left(1-\left(\frac{1}{n^3}-1\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{n^3}-1\right)^{\frac{2}{3}}\right)}=$

0

7) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n-\cos^3 n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin^2 n}{n}-\frac{\cos^3 n}{n}=0$

(on utilise: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n\cdot V_n=0$ si $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$ et V_n est bornée)

8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n+3^n}{a^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3^n}{a^n}\right)\left[\frac{2^n}{3^n}+1\right]=\begin{cases}\text{n'existe pas si } a=-3\\ 1 \text{ si } a=3\\ 0 \text{ si } |a|>3\\ \infty\text{si } |a|<3\end{cases}$ $,a\in\mathbb{R}$

9) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3-\sin^2 n}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\frac{1}{n}\ln\left(3-\sin^2 n\right)}=1$

(on utilise: $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n\cdot V_n=0$ si $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=0$ et V_n est bornée)

10) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3+2^n}{3^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^3}{3^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{3\ln(n)-n\ln 3}=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n\left(3\frac{\ln(n)}{n}-\ln 3\right)}=0.$

Exercice 03: (U_n) est définie par: $U_n=\ln\left(1+U_{n-1}\right)$ avec $U_0\rangle\ 0$.

Chercher la limite de U_n.

on pose: $f\ (x) = \ln(1+x) - x \Rightarrow f\ '(x) = -\frac{x}{1+x} < 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_n < U_{n-1} \Rightarrow U_n$ est décroissante

puisque elle est minorée par 0$\Rightarrow (U_n)$ est convergente$\Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \ln(1+U_{n-1})$

$\Rightarrow l = \ln(1+l) \Rightarrow l = 0.$

Exercice 04: **a)** Soit (U_n) une suite croissante, montrer que la suite $(V_n) = \frac{U_1+U_2+....+U_n}{n}$ est croissante.

$V_{n+1} - V_n = \left(\frac{U_1+U_2+....+U_{n+1}}{n+1}\right) - \left(\frac{U_1+U_2+....+U_n}{n}\right) = \frac{n(U_1+U_2+....+U_{n+1})-(n+1)(U_1+U_2+....+U_n)}{n(n+1)}$
$= \frac{nU_{n+1}-(U_1+U_2+....+U_n)}{n(n+1)} > 0$ car: $U_{n+1} > U_k,\ \forall k \in \{1,...,n\} \Rightarrow V_n$ est croissante.

b) Si (U_n) est une suite convergente peut-on en déduire que (V_n) l'est aussi.

Si (U_n) est une suite convergente$\Rightarrow (U_n)$ est majoée par M car elle est croissante

$\Rightarrow (V_n) = \frac{U_1+U_2+....+U_n}{n} \leq \frac{M+M+....+M}{n} = M$

conclusion: V_n est croissante majorée par $M \Rightarrow (V_n)$ converge.

Exercice 05: Posons $U_1 = \frac{1}{4}, U_2 = \frac{1.3}{4^2 2!}$ et $\forall n \geq 3, U_n = \frac{1.3.5....(2n-1)}{4^n.n!}$

Montrons l'inégalité $\frac{U_{n+1}}{Un} < \frac{1}{2}$.

$\frac{U_{n+1}}{Un} - \frac{1}{2} = \frac{(2n+1)}{4(n+1)} - \frac{1}{2} = \frac{(2n+1)-2(n+1)}{4(n+1)} = -\frac{1}{4(n+1)} < 0 \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{Un} < \frac{1}{2}$.
En déduire la limite de la suite (U_n) .
$\frac{U_{n+1}}{Un} < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow (U_n)$ est décroissante et puisque (U_n) est minorée par 0
$\Rightarrow (U_n)$ converge. Par suite on pose: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_{n+1}}{Un} < \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha} < \frac{1}{2}$
si $\alpha \neq 0 \Rightarrow 1 < \frac{1}{2}$ contradiction$\Rightarrow \alpha = 0$ car:$\alpha \geq 0$.

Exercice 06 : Soient $(U_n)_{n\,\geq\,2}$ et $(V_n)_{n\,\geq\,1}$ deux suites telles que:

$$U_n = \frac{n+7}{n-1} \quad \text{et } V_n = \frac{n+2}{n}$$

(1) Montrer que $(V_n)_{n\,\geq\,1}$ est une sous-suite de $(U_n)_{n\,\geq\,2}$.

Si $V_n = U_{\varphi(n)} \Rightarrow \frac{n+2}{n} = \frac{\varphi(n)+7}{\varphi(n)-1} \Rightarrow (n+2)(\varphi(n)-1) = n(\varphi(n)+7) \Rightarrow \varphi(n) = \frac{8n+2}{2} = 4n+1$

qui est une sous suite croissante en fonction de $n \Rightarrow (V_n)_{n\,\geq\,1}$ est une sous-suite de $(U_n)_{n\,\geq\,2}$.

(2) Soit $(b_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ une suite définie par $b_n = \frac{2-5^n}{3.5^n+1}$ trouver une suite $(a_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ telle que b_n en soit extraite.

$a_n = \frac{2-n}{3.n+1}, n \in \mathbb{N}.$

Exercice 07 : Soit q un nombre réel tel que $|q| \rangle\ 1$.**1)** Montrons que: $\lim\limits_{n\ \to+\infty} q^n = 0.$

Si $q = 0 \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\ \to+\infty} q^n = 0.$

Si $q \neq 0$

Montrons que: $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que: $\forall n \geq \eta_\varepsilon \Rightarrow |q^n| \leq \varepsilon$

$|q^n| \leq \varepsilon \Rightarrow |q|^n \leq \varepsilon \Rightarrow n \ln(|q|) \leq \ln \varepsilon \Rightarrow n \geq \frac{\ln \varepsilon}{\ln(|q|)}$ car: $\ln(|q|) < 0$

Alors il suffit de poser: $\eta_\varepsilon = \max\left(0, \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln(|q|)}\right]\right).$

2) Soit $S_n = q + q^2 + q^3 + ... + q^n$; calculer $(1-q)\, S_n$ puis $\lim\limits_{n\ \to+\infty} S_n$.

$(1-q)\, S_n = (1-q)\left(q + q^2 + q^3 + ... + q^n\right) = q - q^{n+1} = q\,(1 - q^n)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\ \to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\ \to+\infty} q\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q}{1-q}.$

Exercice 08 : On considère la suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n} \qquad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(1) Montrons que $U_n \rangle\ \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 0$ $\qquad (R_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Par récurrence: $U_0 = 2\rangle\ \sqrt{2} \Rightarrow R_0$ est vraie

Supposons que: (R_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ et montrons que: (R_{n+1}) est vraie ç-à-d: $U_{n+1} \rangle\ \sqrt{2}$?

En effet: $U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n} - \sqrt{2} = \frac{U_n^2+2-\sqrt{2}U_n}{2U_n} = \frac{\left(U_n-\sqrt{2}\right)^2}{2U_n} > 0.$

Montrons que: (U_n) est une suite décroissante.

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n} - U_n = \frac{1}{U_n} - \frac{1}{2}\ U_n = \frac{2-U_n^2}{2U_n} < 0$ car: $U_n \rangle\ \sqrt{2}$

$\Rightarrow (U_n)$ est une suite décroissante.

(2) Calculons: $\lim\limits_{n\ \to+\infty} U_n$.

(U_n) est une suite décroissante minorée par: $\sqrt{2}$, donc c'est une suite convergente.

On a: $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n}\right) \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{\beta} \Rightarrow \beta = \sqrt{2}$

car: $U_n \rangle \sqrt{2}$

(3) On pose $V_n = U_n - \sqrt{2}$. Montrer que: $V_{n+1} = \frac{(V_n)^2}{2U_n}$ et en déduire que: $V_{n+1} < \frac{(V_n)^2}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$V_{n+1} = U_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{U_n} - \sqrt{2} = \frac{\left(U_n - \sqrt{2}\right)^2}{2U_n} = \frac{(V_n)^2}{2U_n}$ et puisque: $U_n \rangle \sqrt{2}$

$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{(V_n)^2}{2U_n} < \frac{(V_n)^2}{2\sqrt{2}} \Rightarrow V_{n+1} < \frac{(V_n)^2}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

(4) Montrons que: $0 < V_n < \frac{1}{2^{2^n - 1}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Puisque: $U_n \rangle \sqrt{2} \Rightarrow V_n > 0$ et parsuite: $V_{n+1} < \frac{(V_n)^2}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow V_n < \frac{(V_{n-1})^2}{2} < \frac{\left(\frac{(V_{n-2})^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{(V_{n-2})^4}{2^{2^2-1}} < \cdots < \frac{(V_{n-n})^{2^n}}{2^{2^n-1}} < \frac{1}{2^{2^n-1}}$ car: $V_0 < 1$.

Exercice 09 : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \frac{4U_n + 2}{U_n + 5}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) Pour quelles valeurs de$a$ la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle constante ?

(U_n) est une suite constante$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{4U_n + 2}{U_n + 5} = U_n$

$\Rightarrow 4U_n + 2 = U_n\,(U_n + 5) \Rightarrow U_n^2 + U_n - 2 = 0 \Rightarrow U_n = -2$ ou $U_n = 1 \Rightarrow a = 1$ ou $a = -2$

(2) Montrer que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $U_{n_0} = -2$, alors $U_{n_0-1} = -2$.

s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $U_{n_0} = -2 \Rightarrow \frac{4U_{n_0-1} + 2}{U_{n_0-1} + 5} = -2 \Rightarrow U_{n_0-1} = -2$.

(3) En déduire que si $U_0 \neq -2$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq -2$.

Par l'absurde supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$,tel que $U_n = -2$

$\Rightarrow U_{n-1} = -2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow U_0 = -2$ (d'après (2))

donc contrdiction car: $U_0 \neq -2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq -2$.

(4) On suppose que $U_0 \neq -2$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$.

Remarque: V_n est bien définie car (3)$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq -2$.

a) Vérifier que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+2}}{\frac{U_n-1}{U_n+2}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

En déduire l'expression de U_n en fonction de n et de V_0.

$V_n = \frac{1}{2^n}V_0$ et $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+2} \Rightarrow U_n = \frac{2V_n+1}{1-V_n} = \frac{2\frac{1}{2^n}V_0+1}{1-\frac{1}{2^n}V_0} = \frac{2V_0+2^n}{2^n-V_0}$

c) Etudier alors la convergence de la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si $U_0 = a = 1 \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\, V_n = 0 \Rightarrow \;\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 1$

Si $U_0 = a \neq 1 \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\, \lim_{n \to +\infty} U_n = 1$.

Exercice 10 **(supp)**: On considère la suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n} \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(1) Montrer que $U_n \rangle\, 0$ pour tout $n \geq 0$.

Montrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 0 \ldots\ldots (A_n)$

Pour $n = 0$ on a: $U_0 = 1 > 0 \Rightarrow (A_0)$ est vraie. Supposons que (A_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

et montrons que(A_{n+1}) est vraie ç-a-d:$U_{n+1} > 0$?

en effet: :$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n} > 0$

D'où $U_n > 0.\forall n \in \mathbb{N}$.

(2) On suppose que la suite U_n est convergente, quelle est la valeur l de sa limite ?

Si U_n est convergente$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n}\right) \Rightarrow l = \frac{1}{2}l + \frac{3}{2l} \Rightarrow l = \sqrt{3}$
car $l = -\sqrt{3}$ ne convient pas.

(3) Montrer que $U_n - l \;\rangle 0$ pour tout $n \geq 1$.(Remplacer l par sa valeur).

Montrer que $U_n - \sqrt{3}\rangle\; 0$ pour tout $n \geq 1 \ldots. (B_n)$

Montrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}^* : U_n - \sqrt{3} > 0 \ldots\ldots (B_n)$

Pour $n = 1$ on a: $U_1 = 2 > \sqrt{3} \Rightarrow (B_1)$ est vraie. Supposons que (B_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

et montrons que(B_{n+1}) est vraie ç-a-d:$U_{n+1} - \sqrt{3} \ > 0$?

en effet: :$U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n} - \sqrt{3} = \frac{\left(U_n - \sqrt{3}\right)^2}{2U_n} > 0$

D'où $U_n \ > \sqrt{3}.\forall n \in \mathbb{N}$.

(4) En déduire que (U_n) est décroissante.

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}U_n + \frac{3}{2U_n} - U_n = \frac{\left(\sqrt{3}+U_n\right)\cdot\left(\sqrt{3}-U_n\right)}{2U_n} < 0$ car: $U_n \ > \sqrt{3}.\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow (U_n)$ est décroissante.

(5) Conclure.

Puisque (U_n) est une suite décroissante minorée par: $\sqrt{3}$, donc c'est une suite convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \sqrt{3}$.

Exercice 11 : Posons:

$$\forall n \geq 1 \quad X_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} \qquad \text{et} \qquad Y_n = X_n + \frac{1}{n!}$$

Montrer que les suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes et que leur limite commune est un nombre irrationnel.

(1) Montrons que les suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes?

(a) On a: $Y_n - X_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow Y_n \geq X_n, \forall n \in \mathbb{N}$, et $\lim\limits_{n \to +\infty} (Y_n - X_n) = 0$

(b) $X_{n+1} - X_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow X_n$ est croissante.

(c) $Y_{n+1} - Y_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 1 \\ \frac{2-n}{(n+1)!} < 0 \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow Y_{n+1} - Y_n \leq 0 \Rightarrow Y_n$ est décroissante.

Conclusion: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes avec:

$\lim\limits_{n \to +\infty} Y_n = \lim\limits_{n \to +\infty} X_n = \alpha$ et $X_n < \alpha < Y_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) Supposons par l'absurde que $\alpha \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}$ et $b \neq 0$ avec $\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow X_n < \frac{a}{b} < Y_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow X_b < \frac{a}{b} < Y_b \;\; (n = b) \Rightarrow b!X_b < b!\frac{a}{b} < b!Y_b \Rightarrow M < (b-1)!a < M+1$ avec $M = b!X_b \in \mathbb{N}$

Donc contradiction car on a un entier naturel compris entre deux entiers consécutifs$\Rightarrow \alpha \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 12 : Ėtant donné les nombres a et b vérifiant $0 \langle a \langle b$, on considère les deux suites:

$$U_n = \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}} \text{ et } V_n = \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2} \quad \text{avec } U_0 = a \quad \text{et} \quad V_0 = b$$

Montrer que ces deux suites convergent et admettent la même limite.

(1) Montrons que: $U_n > 0$ et $V_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}. \cdots (\Re_n)$

Par récurrence: $U_0 = a > 0$ et $V_0 = b > 0 \Rightarrow \Re_0$ est vraie. Supposons que $(\Re_n)$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

et montrons que $(\Re_{n+1})$ est vraie ç-à-d: $U_{n+1} > 0$ et $V_{n+1} > 0$?

$U_{n+1} = \sqrt{U_nV_n} > 0$ et $V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} > 0 \Rightarrow U_n > 0$ et $V_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) Montrons que: $V_n \geq U_n, \forall n \in \mathbb{N}$

On a: $V_n - U_n = \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2} - \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}} = \frac{\left(\sqrt{U_{n-1}}-\sqrt{V_{n-1}}\right)^2}{2} \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

(3) Etudions la monotonie de chaque suite:

On a: $V_n \geq U_n \Rightarrow U_n \cdot V_n \geq U_n^2 \Rightarrow \sqrt{U_n \cdot V_n} \geq U_n \Rightarrow U_{n+1} \geq U_n, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow U_n$ est une suite croissante.

Par suite: $V_n \geq U_n \Rightarrow 2\,V_n \geq V_n + U_n \Rightarrow V_n \geq V_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow V_n$ est une suite décroissante.

(4) On a: U_n est une suite croissante et majorée par b alors elle converge, et V_n est une suite décroissante

et minorée par a alors elle converge.

(5) Si on pose: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \alpha$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \beta \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{U_{n-1}V_{n-1}}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{U_{n-1}+V_{n-1}}{2}$

$\Rightarrow \alpha = \sqrt{\alpha\beta}$ et $\beta = \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow \alpha = \beta$ donc les deux suites sont adjacentes.

Partie IV

Fonctions numériques d'une variable réelle.

4.10.1 1.1 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

1) On appelle **fonction numérique réelle,** sur un ensemble E, toute application de E dans $\mathbb{R}$. Et on note l'ensemble de ces fonctions par: $F(E,\mathbb{R})$.

2) Deux fonctions f et g de E dans $\mathbb{R}$ sont égales si $f(x) = g(x)$ pour tout x élément de E.

3) Pour chaques deux fonctions de $F(E,\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ on a:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \text{ et } (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

4) Une fonction f est dite **majorée** dans E s'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ qui vérifie:

$$\forall x \in E,\ f(x) \leq M.$$

5) Une fonction f est dite **minorée** dans E s'il existe une constante $m \in \mathbb{R}$ qui vérifie:

$$\forall x \in E, m \leq f(x).$$

6) Une fonction f est dite **bornée** dans E si elle est majorée et minorée à la fois.

7) Une fonction f est dite **croissante** dans E si et seulement si:

$$\forall x_1, x_2 \in E; x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

et elle est **strictement croissante** si au lieu de $\leq$ on a $<$.

8) Une fonction f est dite **décroissante** dans E si et seulement si:

$$\forall x_1, x_2 \in E; x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

et elle est **strictement décroissante** si au lieu de $\geq$ on a $>$.

9) Une fonction **monotone (resp. strictement monotone)** est une fonction qui est ou bien croissante ou bien décroissante (resp. strictement croissante ou bien strictement décroissante).

10) Une fonction f est dite **constante** dans E si et seulement si:

$$\forall x_1, x_2 \in E; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\ (x_1) = f\ (x_2)$$

11) Une fonction f est dite **périodique** dans E de période T si et seulement si:

$$\exists T > 0;\ \forall x \in E;\ f\ (x + T) = f\ (x)$$

Exemple 29 *$f\ (x) = \cos x$ est une fonction périodique de période 2π.*

4.10.2 1.2 LIMITE ET CONTINUÉTÉ

Theorem 30 *La limite d'une fonction f en un point x_0 si elle existe alors elle est unique et elle est égale à la limite à droite et la limite à gauche. Et on écrit:*

$$\lim_{x \to x_0} f\ (x) = \lim_{x \to x_0^+} f\ (x) = \lim_{x \to x_0^-} f\ (x) = l.$$

1.2.1 CONTINUÉTÉ

Soit f une fonction définie en un point x_0 de E. On dit que f est **continue** en x_0 si et seulement si f est **continue** à droite et à gauche de x_0 c'est à dire:

$$\lim_{x \to x_0} f\ (x) = \lim_{x \to x_0^+} f\ (x) = \lim_{x \to x_0^-} f\ (x) = f\ (x_0)$$

Exemple 31

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \quad &\to \quad f\ (x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \ \text{si } x \neq 0 \\ 1 \ \text{si } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

alors puisque :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f\ (0) \ \textit{alors } f \textit{ est } \textbf{\textit{continue}} \textit{ en } 0.$$

et elle est continue dans $\mathbb{R}$, car le seul problème est le point 0.

1.2.2 PROPRIÉTÉS SUR LES FONCTIONS CONTINUES

Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$:

1) est bornée dans $[a, b]$.

2) atteint son minimum $m = \inf f\ (x)$et son maximum $M = \max f\ (x)$ pour $x \in [a, b]$.

3) atteint au moins une fois toute valeur strictement comprise entre m et M.

1.2.3 Lien entre les fonctions discontinues et les suites

Soient f une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}$ et a un point de E.

Alors on a le résultat suivant:

si f est continue en $a \Rightarrow \forall x_n$ une suite avec $x_n \to a$ qd $n \to +\infty$ on a $f\ (x_n) \to f\ (a)$

Le contraire s'il existe $x_n \to a$ qd $n \to +\infty$ on a $f\ (x_n) \nrightarrow f\ (a)$ alors la fonction est dite **discontinue.**

Exemple 32 *Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ définie par: $f\ (x) = E[x]$ où $E[x]$ désigne la partie entière de x ($E[x] = \max(y)$;$y \in \mathbb{Z}$ avec $y \leq x$).*

Montrons que f n'est pas continue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Soit $a \in \mathbb{Z}$, et considérons la suite$(x_n)_n$ définie par:$x_n = a - \frac{1}{n}$.

On a:

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} x_n &= a \text{ et } f\ (x_n) = a - 1 \\ &\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f\ (x_n) = a - 1 \neq a = E[a] = f(a) \end{aligned}$$

donc f est discontinue en $a \in \mathbb{Z}$.

4.10.3 1.3 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIARES

Le théorème des valeurs intermédiares est un outil pour résoudre les équations de type:

$$f\ (x) = 0$$

Theorem 33 (théorème des valeurs intermédiares) *Soit f une fonction continue dans un intervalle $[a,b]$ avec $a,b\in\mathbb{R}$, telle que:*

$$f\ (a)\cdot\ f\ (b)<0$$

c'est à dire $f\ (a)$ et $f\ (b)$ ont deux signes opposés. Alors il existe une constante $\alpha\in\,]a,b[$ tel que:

$$f\ (\alpha)=0$$

Exemple 34 *Soit f:$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f\ (x)=\cos\sqrt{x}$*

Montrons que l'équation: $f\ (x)=0$ admet une solution dans $]0,10[$.

En effet: la valeur qui est prés de 10 tel que sont cos est connu est: π^2.

alors on a: $f\ \left(\pi^2\right)=-1$ et $f\ (0)=1\Rightarrow f\ \left(\pi^2\right)\cdot\ f\ (0)<0$ de plus f est continue.

D'après le théorème des valeurs intermédiares, il existe une constante $\alpha\in\left]0,\pi^2\right[\subset\,]0,10[$ tel que:

$$f\ (\alpha)=\cos\sqrt{\alpha}=0.$$

Remarque 35 *On la même chose si $a=-\infty$ ou $b=+\infty$ sauf au lieu de:*

$$f\ (a)\cdot\ f\ (b)\ <\ 0\ \text{on a:}\left[\lim_{x\to-\infty}f\ (x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to+\infty}f\ (x)\right]<0\ \text{ou bien}$$
$$\left[\lim_{x\to-\infty}f\ (x)\right]\cdot b\ <\ 0\ ,\ \text{ou bien}\ a\cdot\left[\lim_{x\to+\infty}f\ (x)\right]<0.$$

par suite on trouve le même résultat.

4.10.4 1.4 Le PROLONGEMENT PAR CONTINUÉTÉ

Supposons que f est une fonction définie dans $\mathbb{R}-\{a\}$. Alors comme question peut-on prolonger par continuété la fonction f sur $\mathbb{R}$? C'est à dire; existe elle une autre fonction qui dépend de la fonction f et qui est définie sur $\mathbb{R}$?

Pour répondre à cette question on suit les démarches suivantes:

1) On calcul la limite de la fonction f au point a, par suite on a les cas suivants:

a) La limite est égale à l'infini, ç-à-d:

$$\lim_{x \to a} f\ (x) = -\infty \text{ ou bien } \lim_{x \to a} f\ (x) = +\infty.$$

Exemple 36 *f:$\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ avec $f\ (x) = \frac{1}{x}$*

b) La limite à gauche est différente à la limite à droite:

$$\lim_{x \to a^-} f\ (x) \neq \lim_{x \to a^+} f\ (x)\,.$$

Exemple 37 *f:$\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ avec $f\ (x) = \begin{cases} x \ln x \ \ si\ x > 0 \\ \frac{\sin x}{x} \ \ si\ x < 0 \end{cases}$*

$$0 = \lim_{x \to 0^-} f\ (x) \neq \lim_{x \to 0^+} f\ (x) = 1.$$

c) Dans le calcul de lalimite on trouve deux limite ou plus.

Exemple 38 *f:$\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ avec $f\ (x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. La fonction cos est périodique et $\cos(\infty)$ n'existe pas, car:*

$$\begin{aligned} si\ x_n &= 2n\pi \ \ et\ y_n = 2n\pi + \pi \ \ alors \lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = +\infty \\ mais \lim_{n \to +\infty} f\ (x_n) &\neq \lim_{n \to +\infty} f\ (y_n) \ \ et\ la\ limite\ d'une\ fonction\ si\ elle\ existe\ elle\ est\ unique. \end{aligned}$$

d) On trouve une limite constante unique:

$$\lim_{x \to a^-} f\ (x) = \lim_{x \to a^+} f\ (x) = \alpha.$$

2) En déduire le prolongement par continuété s'il existe?

Dans les cas a),b) et c) le prolongement par continuété n'existe pas et là on termine la preuve.

Mais dans le cas d) le prolongement par continuété de la fonction f existe et il est de la

forme:

$$\begin{aligned} F \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto \quad \begin{cases} f\ (x) & \text{si } x \neq a \\ \alpha & \text{si } x = a \end{cases} . \end{aligned}$$

Alors dans ce cas la fonction F est définie dans $\mathbb{R}$ et elle est continue.

Exemple 39 *f:$\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ avec $f\ (x) = \frac{\sin x}{x}$*

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

le prolongement par continuété de la fonction f existe et il est de la forme:

$$\begin{aligned} F \quad &: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto \quad \begin{cases} \frac{\sin x}{x} \, si \ x \neq 0 \\ 1 \ si \ x = 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

4.10.5 2.1 DÉRIVATION

2.1.1 Définition

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I, et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f **est dérivable en** x_0, s'il existe un nombre réel unique α tel que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f\ (x) - f\ (x_0)}{x - x_0} = \alpha$$

α est appelé dérivée de f au point x_0 est noté $f'(x_0)$.

La fonction est dérivable dans tout l'intervalle I quand elle est dérivable en tout point x_0 de I.

D'autre part si on pose: $x - x_0 = h$ alors on a:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\ (x_0 + h) - f\ (x_0)}{h} = \alpha$$

Exemple 40 *Trouver la dérivée de $f\ (x) = \sin x$ en utilisant la définition de la dérivée.*

En un point x_0:

$$\begin{aligned}
f\ '(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f\ (x)-f\ (x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0} 2\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}\cdot\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\\
&= \cos x_0\ ,\ \textit{car: } \lim_{x\to x_0}\frac{\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\left(\frac{x-x_0}{2}\right)} = 1
\end{aligned}$$

Alors $\forall x\in\mathbb{R}, (\sin x)' = \cos x$.

Proposition 41 (1) *Si f n'est pas continue en un point x_0, alors elle n'est pas dérivable en ce point.*

Proposition 42 (2) *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en point x_0 si et seulement si elle admet en ce point des dérivées à droite*

$$\left(\lim_{x\to x_0^+}\frac{f\ (x)-f\ (x_0)}{x-x_0}\right)\ \textit{et à gauche}\ \left(\lim_{x\to x_0^-}\frac{f\ (x)-f\ (x_0)}{x-x_0}\right)\ \textit{égales à } \alpha.$$

2.1.2 Quelques propriétés sur les fonctions dérivables

Proposition 43 *Etant donnés un intervalle I et deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en un point x_0 de I, alors:*

1) $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f\ '(x_0) + g'(x_0)$.

2) $a\cdot f$ est dérivable en x_0 et $(a\cdot f)'(x_0) = a\cdot f\ '(x_0), \forall a\in\mathbb{R}$.

3) $f\cdot g$ est dérivable en x_0 et $(f\cdot g)'(x_0) = f\ '(x_0)\cdot g(x_0) + f\ (x_0)\cdot g'(x_0)$.

4) Si $g(x_0)\neq 0$, donc $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f\ '(x_0)\cdot g(x_0)\ -\ f(x_0)\cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$.

2.1.3 Dérivée d'une fonction composée

Proposition 44 *Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ et x_0 un point de I.*

Si la fonction f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $f\ (x_0)$ alors $g\circ f$ est dérivable

en x_0 et on a:

$$(g \circ f)\ '(x_0) = f\ '(x_0) \cdot \left[g'(f\ \ (x_0))\right]$$

Exemple 45

$$[\sin (f\ \ (x))]' = f\ '(x) \cdot \cos (f\ \ (x))$$

2.1.4 Dérivée d'une fonction réciproque

Proposition 46 *Soient $f : I \to J$ une fonction bijective, x_0 un élément de I et $y_0 = f\ (x_0)$ l'élément de J. Pour que $f^{\ -1}$ est dérivable en y_0 il faut et il suffit que:*

f est dérivable en x_0, $f\ '(x_0)$ non nul et $f^{\ -1}$ est continue en y_0. Alors:

$$\left(f^{\ -1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f\ '(x_0)} = \frac{1}{(f\ ' \circ f^{\ -1})(y_0)}$$

Exemple 47 *On note la fonction réciproque de* $\sin x$ *par* $\arcsin x$ *alors la dérivée de est:*

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Remarque 48 *Toujours on donne le résultat en fonction de la première variable de la fonction réciproque donnée.*

2.1.5 Dérivées d'ordre supérieure

On note les dérivées d'ordre supérieure d'une fonction f qui est dérivable dans I un intervalle de $\mathbb{R}$ par: $f^{\ (n)} : I \to \mathbb{R}$ vérifiant:

i) $f^{\ (0)} = f$.

ii) $f^{\ (k+1)} = \left(f^{(k)}\right)'$, pour tout $k = 0, 1, ..., n-1$.

4.10.6 2.2 FONCTION DE CLASSE C^n

Proposition 49 *Une fonction de classe C^n, est une fonction continue et admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre n. Et on dit également que f est n fois continûement dérivable.*

Nous alons envisager ici la méthode pratique pour étudier la classe d'une fonction.

1) Si $n = 0$:

dans ce cas on a pas une fonction de classe C^0 mais on écrit une fonction de classe $C(I)$ c'est les fonctions continues dans un intervalle I.

2) Si $n = 1$ (fonction de classe $C^1(I)$):

Une fonction de classe $C^1(I)$ est une fonction continue et la première dérivée de cette fonction **existe** et **continue** en tout point de I**.**

a) Existence

Pour étudier l'existence de la première dérivée on utilise la définition de la dérivée en tout point x_0 de I ç'est à dire on calcul:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f\ (x) - f\ (x_0)}{x - x_0} = \alpha$$

Alors on les cas suivants:

i) Si $\alpha = \pm\infty$ ou bien α est égale deux limites ou plus ou bien la limite à gauche est différente à la limite à droite, alors la limite n'existe pas et donc la fonction n'est pas de classe C^1.

ii) Si α est égale à une constante unique alors la limite existe et on passe à l'étude de la continuété de la dérivée.

b) Continuété de la première dérivée

Pour étudier la continuété de la première dérivée en x_0 on calcul $f\ '(x)$ ensuite on calcul:,

$$\lim_{x \to x_0} f\ '(x) = \beta \text{ alors si } \beta \neq \alpha$$

Donc la première dérivée n'est pas continue ce qui permet de dire que f n'est pas de classe C^1. Par contre si:

$$\beta = \alpha$$

Alors la première dérivée est continue ce qui permet de dire que f est de classe C^1.

3) Si $n = 2$ (fonction de classe $C^2(I)$):

Une fonction de classe $C^2(I)$ est une fonction telle que ça dérivée est de classe $C^1(I)$. Donc on fait le même travail que le deuxième cas mais on utilise $f\ '$ au lieu de f.

Remarque 50 *Si f n'est pas de classe $C^n(I)$, alors elle n'est pas de classe $C^k(I)$,* $\forall k \geq n+1$.

Exemple 51 *Soit la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par:*

$$f\ (x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 \quad si\ x = 0 \end{cases}$$

Etudier la classe de f?

1) La continuété de f?

La fonction est continue dans $\mathbb{R}^*$.

Et en $x = 0$, on a:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} &= 0 \ car\ \lim_{x \to 0} x^2 = 0\ et\ \sin \frac{1}{x}\ est\ born\acute{e}e. \\ &= f\ (0). \end{aligned}$$

Donc f est continue dans $\mathbb{R}$.

2) f est elle de classe C^1?

La fonction f est dérivable dans $\mathbb{R}^*$, mais le seul problème est le point 0.

i) Existence de la 1ère dérivée en 0?

$$\lim_{x \to 0} \frac{f\ (x) - f\ (0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow\ existe.$$

ii) La continuété de la 1ère dérivée en 0?

$f\ '(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f\ '(x)$ *n'existe pas, donc la 1ère dérivée n'est pas continue en 0.*

Conclusion: *f n'est pas de classe C^1.*

4.10.7

4.10.8 2.3 THÉORÈME DE ROLLE

Theorem 52 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$*

et telle que: $f\ (a) = f\ (b)$.

Alors il existe une constante $c \in\ ]a, b[$ telle que: $f\ '(c) = 0$.

Exemple 53 *Pour montrer que l'équation* $\sin x + \cos x = 0$ *admet au moins une solution dans l'intervalle* $]0, \pi[$. *On utilise la fonction* $f\ (x) = e^x \sin x - 1$ *qui est continue dans* $[0, \pi]$, *dérivable dans* $]0, \pi[$ *et* $f\ (0) = f\ (\pi) = -1$. *Donc d'après ROLLE* $\exists c \in\ ]0, \pi[$ *telle que:* $f\ '(c) = 0 \Rightarrow e^c \sin c + e^c \cos c = 0 \Rightarrow \sin c + \cos c = 0.$

4.10.9 2.4 THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

Theorem 54 *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* $[a, b]$, *dérivable sur* $]a, b[$. *Alors il existe une constante* $c \in\ ]a, b[$ *tel que:*

$$f\ (b) - f\ (a) = (b - a) f\ '(c)\,.$$

Exemple 55 *Montrons l'inégalité suivante:*

$$\forall x \in\ ]0, 1[\,,\ \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ .$$

On applique le théorème des accroissements finis sur la fonction $\arcsin x$ *dans* $[0, x] \subset [0, 1]$. *Alors il existe une constante* $c \in\ ]0, x[$ *tel que:*

$$\begin{aligned} f\ (x) - f\ (0) &= (x - 0) f\ '(c)\,, .f\ '(c) = \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}}. \\ \textit{Mais} &: \frac{1}{\sqrt{1 - c^2}} < \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \textit{car:} c < x. \\ &\Rightarrow \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

4.10.10 2.5 THÉORÈME DE L'HÔPITAL

Theorem 56 *Soient* f *et* g *deux fonctions dérivables au voisinage de* $x_0 \in\ ]a, b[$.

$$\begin{aligned} \textit{Si} \lim_{x \to x_0} f\ (x) &= A \textit{ et } \lim_{x \to x_0} g\ (x) = B \textit{ où } A, B \textit{ sont tous les deux nuls} \\ \textit{ou tous les deux infinis, } g'(x) &\neq 0 \textit{ pour } x \textit{ voisin de } x_0, \textit{ et si } \lim_{x \to x_0} \frac{f\ '(x)}{g'(x)} \textit{ existe alors:} \\ \lim_{x \to x_0} \frac{f\ (x)}{g\,(x)} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f\ '(x)}{g'(x)}. \end{aligned}$$

Exemple 57

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2.$$

Formules de Taylor.

Chapitre 5

Développements limités.

On peut généraliser le théorème des accroissements finis par une formule dite de Taylor, qui est un outil surtout dans le calcul des limites des fonctions ou on a des formes indéterminées.

5.1 1 Formules de Taylor

5.1.1 1.1 Théorème des acroissement finis

Theorem 58 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe une constante $c \in \ ]a,b[$ tel que:*

$$f\ (b) - f\ (a) = (b-a)\, f\,'(c)\,.$$

5.1.2 1.2 Théorème des acroissement finis généralisés

Theorem 59 *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ avec $g\,'$ne s'annule pas sur $]a,b[$, alors il existe une valeur c de $]a,b[$ telle que:*

$$\frac{f\ (b) - f\ (a)}{g\ (b) - g\ (a)} = \frac{f\,'(c)}{f\,'(c)}.$$

5.1.3 1.3 Formule de Taylor-Lagrange

Soit f de classe C^n sur $[a,b]$, $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$, alors il existe une valeur c de $]a,b[$ telle que:

$$\begin{aligned} f\ (b) &= \sum_{p=0}^{n} \frac{(b-a)^p}{p!} f^{\ (p)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{\ (n+1)}(c)\,. \\ &= f\ (a) + (b-a)\ f^{\ \prime}(a) + ... + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{\ (n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{\ (n+1)}(c)\,. \end{aligned}$$

Cette formule est connue par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n. De plus le terme $\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{\ (n+1)}(c)$ est appelé reste de Lagrange.

Remarque 60 *Si on pose: $n = 0$ dans la formule de Taylor-Lagrange, on trouve l'égalité des accroissements finis.*

5.1.4 1.4 Formule de Taylor-Young

Soit f définie sur un intervalle I, admettant en un point $a \in I$ des dérivées jusqu'à l'ordre n. Alors il existe un voisinage V de a et une fonction $\varepsilon : V \to \mathbb{R}$ tels que:

$$\begin{aligned} \forall x \ \ &\in \ \ V,\ f\ (x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(x-a)^p}{p!} f^{\ (p)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \ \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0. \\ &= \ f\ (a) + (x-a)\ f^{\ \prime}(a) + ... + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{\ (n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x) \ \text{ et } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

C'est la formule de Taylor avec un reste de Young $((x-a)^n \varepsilon(x)\ )$.

5.1.5 1.5 Formule de Maclaurin

C'est la formule de Taylor-Lagrange avec $b = x, a = 0$ et $c = \theta x$ avec $0 < \theta < 1$, c'est à dire:

$$\forall x \in I,\ f\ (x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} f^{\ (p)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{\ (n+1)}(\theta x) \ \text{ avec } 0 < \theta < 1.$$

5.2 2. Développements limités

Définition 61 *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0, sauf peut-être en x_0. On dit que f admet un développement limité (D.L) d'ordre n au voisinage de x_0 s'ils existes des nombres réels a_0, a_1, ..., a_n et une fonction ε tels que pour tout élément $x \in I \subset \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned}
f\ (x) &= a_0 + a_1 (x - x_0) + ... + a_n (x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon (x - x_0)\ , \\
\textit{avec}\ \lim_{x \to x_0} \varepsilon (x - x_0) &= 0. \\
\textit{on pose}\ &:\ P (x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + ... + a_n (x - x_0)^n \\
&\quad \textit{c'est la partie régulière du D.L, et elle est unique.} \\
&\quad (x - x_0)^n \varepsilon (x - x_0)\ \textit{ est le reste du D.L, on peut l'écrire } o((x - x_0)^n), \\
\textit{avec}\ \lim_{x \to x_0} \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} &= 0
\end{aligned}$$

- Si $x_0 = 0$ on a:

$$f\ (x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon (x)\ ,\ \textit{avec}\ \lim_{x \to 0} \varepsilon (x) = 0.$$

-Si $x_0 = \pm\infty$ on pose dans la formule du D.L au voisinage de 0, $X = \frac{1}{x}$, et on aura:

$$\begin{aligned}
f\ (x) &= a_0 + a_1 \frac{1}{x} + ... + a_n \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right)\ , \\
\textit{avec}\ \lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon \left(\frac{1}{x} \right) &= 0.
\end{aligned}$$

On peut déterminer la formule du D.L à l'aide de la formule de taylor-Young, alors sous les hypothèses de la formule de Taylor on a:

$$\begin{aligned}
f\ (x) &= a_0 + a_1 (x - x_0) + ... + a_n (x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon (x - x_0)\ , \\
\text{avec}\ \lim_{x \to x_0} \varepsilon (x - x_0) &= 0. \\
\text{avec}\ &:\ a_0 = f\ (0)\ \text{ et } a_k = \frac{f^{(k)} (x_0)}{k!}\ \text{ où } 1 \leq k \leq n.
\end{aligned}$$

5.2.1 2.1 Principaux développement limité

Les fonctions suivantes admettent un D.L au voisinage de 0.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...++\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right) \text{ avec} \\
\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^n\right)}{x^n} &= 0, \forall x\in\mathbb{R}. \text{(ordre n)} \\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^p\,\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+o\left(x^{2p+1}\right) \text{ avec} \\
\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^{2p+1}\right)}{x^{2p+1}} &= 0, \forall x\in\mathbb{R}. \text{(ordre 2p+1)} \\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+...+(-1)^p\,\frac{x^{2p}}{(2p)!}+o\left(x^{2p}\right) \text{ avec} \\
\lim_{x\to 0}\frac{o\left(x^{2p}\right)}{x^{2p+1}} &= 0, \forall x\in\mathbb{R}. \text{(ordre 2p)} \\
(1+x)^m &= 1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-p+1)}{p!}x^p+o\left(x^p\right), \\
\forall x &\in \left]-1,+\infty\right[, m\in\mathbb{R}-\mathbb{N} \\
\text{et si } m &\in \mathbb{N} \text{ alors: } (1+x)^m=\sum_{k=0}^{m}C_m^k\;x^k. \\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+(-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right)
\end{aligned}
$$

5.2.2 2.2 Propriétés des développements limités

2.2.1 Parité

Si f est une fonction paire (resp impaire) alors dans la partie régulière du D.L on a que les puissances paires (resp impaires).

2.2.2 Continuité

Si f admet un D.L d'ordre n de partie régulière $a_0+a_1x+...+a_nx^n$ alors

$$\lim_{x\to 0}f\;\;(x)=a_0 \text{ d'où } f \text{ est continue en 0 ou est prolongeable par continuité en 0.}$$

2.2.3 Dérivabilité

Si f admet un D.L d'ordre n de partie régulière $a_0+a_1x+...+a_nx^n$ $(n \geq 1)$ alors f est dérivable en 0 et $f\,'(0)=a_1$.

5.2.3 2.3 Opérations sur les développements limités

Soit f une fonction qui admet un D.L à l'ordre n de partie régulière P_n et g une autre fonction qui admet un D.L à l'ordre m de partie régulière Q_{m} avec $c=\min(n,m)$ alors:

1) **Somme:**

$f+g$ admet un D.L à l'ordre c de partie régulière P_c+Q_c.

2) **Produit:**

$f\times g$ admet un D.L à l'ordre c de partie régulière R_c, obtenue en ne conservant dans $P_n\times Q_m$ que les monômes de degré p avec $p\leq c$.

3) **Produit par un scalaire:**

$\lambda\cdot$ f admet un D.L à l'ordre n de partie régulière $\lambda\cdot P_n$.

4) **Quotient:**

$\frac{f}{g}$ admet un D.L à l'ordre s de partie régulière R_S qui est la division suivant les puissances croissantes de f par g.

5) **composée:**

$f\circ g$ admet un D.L à l'ordre c de partie régulière R_c, obtenue en ne conservant dans $P_n\circ Q_m$ que les monômes de degré p avec $p\leq c$.

5.3 Exercice:

Exercice 01: Calculer les limites suivantes:

$$1)\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\ln x\quad 2)\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}e^{-\sqrt{x}}\quad 3)\lim_{x\to0^+}\left(\ln(\sin x)-\ln x\right)$$
$$4)\lim_{x\to0}n\frac{\sin nx}{\sin mx}\quad 5)\lim_{x\to0^+}\frac{x^x-1}{x}\quad 6)\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$$
$$7)\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\quad 8)m,n\in\mathbb{N}\text{ étudier }\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^n}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$$

Exercice 02 : Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes: $f\ (x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}$, $g\ (x) = \ln(4x+3)$, $h(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$

Exercice 03: Soient:$h\ (x) = \sqrt{x^2+1}$, $g\ (x) = \ln(x + h\ (x))$, $f\ (x) = \frac{g\ (x)}{x}$.

(1) Montrer que:$h\ (x) > -x\ \forall x \in \mathbb{R}$, en déduire D_f.

(2) Calculer $g\ (x) + g\ (-x)$ et en déduire que g est impaire et que f est paire.

(3) Vérifier que: $\sqrt{x^2+1}h\ '(x) + x\ h\ (x) = x + x\sqrt{x^2+1}$.

Exercice 04: Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$une fonction définie par: $f\ (x) = \frac{\ln(1+x)}{x} si\ x \neq 0$ et $f\ (0) = 1$

Montrer que f est continue en 0.

Exercice05: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$une fonction définie par: $f\ (x) = \frac{\cos x - 1}{x} si\ x \neq 0$ et $f\ (0) = 0$

Montrer que f est continue en 0.

Exercice06: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$une fonction définie par: $f\ (x) = x - [x]$, $[]$ est la partie entière.

Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Exercice 07: Peut-on prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes:

$$f\ (x) = \sin x\ \sin\frac{1}{x},\quad g\ (x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2},\ h(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

Exercice 08: Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie par: $f\ (x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

L'équation $f\ (x) = 0$ admet-elle une solution?

Exercice 09:(supp) Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction définie par: $f\ (x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x - x\cos x$.

L'équation $f\ (x) = 0$ admet-elle une solution dans $]0, 2\pi[$?

Exercice 10: En utilisant la définition de la dérivée, trouver la dérivée $f\ '$de f dans les cas suivants (préciser sur quel ensemble f est dérivable):

$$a) f\ (x) = \frac{2}{(x-3)^2}\quad b)\ (\text{supp})\ g\ (x) = \sqrt{1+x^2}\quad c) h\ (x) = \sin 2x.$$

Exercice 11: Démontrer qu'entre deux racines réelles de $e^x \sin x = 1$, il existe au moins une racine réelle de $e^x \cos x = -1$.

Exercice 12:(supp) Calculer en utilisant la règle de l'hôpital les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}, \lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}, \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$$

Exercice 13: Soit la fonction :

$$f\ :\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f\ (x) = \begin{cases} x^2 \log|x\ |\ \text{ si } \ x \neq 0 \\ 0 \ \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

(1) Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(2) Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(3) La fonction f est-elle de classe $C^{\ 1}$? de classe $C^{\ 2}$? Justifier.

Exercice 14:(supp) Soit la fonction :

$$f\ :\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f\ (x) = \begin{cases} x\ \sin \frac{1}{x} \text{ si } \ x \neq 0 \\ 0 \ \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

(1) Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(2) Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(3) Les mêmes questions pour la fonction:

$$g\ :\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto g\ (x) = \begin{cases} x^2\ \sin \frac{1}{x} \text{ si } \ x \neq 0 \\ 0 \ \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

b) g est-elle de classe C^2?

Exercice 15: Soient:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sin x^5 \qquad x \mapsto \sin \sqrt[5]{x}$$

Montrer que f est dérivable en 0 et que g ne l'est pas .

Exercice 16: Déterminer $f^{(n)}(x)$ dans les cas suivants: $a)$ $f(x) = \cos x$, $b)$ $f(x) = \sin x$, $c)$(supp) $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Exercice 17:

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction:

$$f_n : [n, n+1] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \log x$$

(2) En déduire la nature de la suite de terme général: $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

Exercice 18:(supp) **(1)** Etudier la dérivabilité de la fonction:

$$f(x) = x\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \text{ si } x \neq 1 \text{ , } f(1) = 1$$

(2) Determiner a, b tels que: la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ , } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ si non}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice20:

(1) Montrer que:
$$\forall x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1 + x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

(on ne calculera qu'une seule dérivée pour chaque inégalité).

(2) En déduire que :
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Exercice 21: (supp) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$une fonction périodique de période $T > 0$.

(1) On suppose que f a une limite en $+\infty$, montrer que f est constante.

(2) On suppose que f monotone, montrer que f est constante.

5.4 Solutions des exercices:

Exercice 01: Calculer les limites suivantes:

1)

$$1)\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)-\ln x=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{\sqrt{(1+x^2)}}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)=0$$

$$2)\lim_{x\to+\infty}x^\alpha e^{-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\alpha\ln x}e^{-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\alpha\ln x-\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\sqrt{x}\left(\frac{2\alpha\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-1\right)}=0$$

$$3)\lim_{x\to0^+}\left(\ln(\sin x)-\ln x\right)=\lim_{x\to0^+}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=0\text{ car: }\lim_{x\to0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$$

$$4)\lim_{x\to0}n\frac{\sin nx}{\sin mx}=\lim_{x\to0}n\frac{nx}{mx}\frac{\frac{\sin nx}{nx}}{\frac{\sin mx}{mx}}=\frac{n^2}{m}\text{ car:}\frac{\sin y}{y}\to0\text{ qd: }y\to0$$

$$5)\lim_{x\to0^+}\frac{x^x-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x\ln x}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\left(e^{x\ln x}-1\right)\ln x}{x\ln x}=\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$$

$$\text{car}:\lim_{x\to0^+}\frac{\left(e^{x\ln x}-1\right)}{x\ln x}=\lim_{y\to0}\frac{(e^y-1)}{y}=e^0=1\text{ par définition de la dérivée}\quad(5.1)$$

$$6)\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=-\sin a\text{ par définition de la dérivée.}$$

$$7)\quad\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x}\frac{1-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0\quad(5.2)$$

$$8)\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^n}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^n}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}\cdot\frac{\sqrt{1+x^n}+\sqrt{1-x^m}}{\sqrt{1+x^n}+\sqrt{1-x^m}}\quad(5.3)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^n-x^m}{x^n\left(\sqrt{1+x^n}+\sqrt{1-x^m}\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1-x^{m-n}}{\left(\sqrt{1+x^n}+\sqrt{1-x^m}\right)}\quad(5.4)$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}\text{ si }m>n\\ 0\text{ si }m=n\\ -\infty\text{ si }m<n\end{cases}\quad(5.5)$$

Exercice 02 : Trouver le domaine de définition des fonctions suivantes: $f\ (x)=\sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}$, $g\ (x)=\ln(4x+3)\,,\ h(x)=\sqrt{x^2-2x-5}$

1) $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{2+3x}{5-2x}\geq0\text{ et }5-2x\neq0\right\}$ alors: $\frac{2+3x}{5-2x}\geq0\Leftrightarrow2+3x\geq0$ et $5-2x>0$ ou $2+3x\leq0$ et $5-2x<0$

$\Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$ et $x < \frac{5}{2}$ ou $x \leq -\frac{2}{3}$ et $x > \frac{5}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right[$

2) $D_g = \{x \in \mathbb{R}/4x+3>0\} \Leftrightarrow x \in \left]-\frac{3}{4}, +\infty\right[$.

3) $D_h = \left\{x \in \mathbb{R}/x^2-2x-5 \geq 0\right\} \Leftrightarrow x \in \left]-\infty, 1-\sqrt{6}\right] \cup \left[1+\sqrt{6}, +\infty\right[$

Exercice 03: Soient:$h\ (x) = \sqrt{x^2+1}, \quad g\ (x) = \ln\left(x + h\ \ (x)\right),\ f\ (x) = \frac{g\ (x)}{x}$.

(1) Montrer que:$h\ (x) > -x\ \forall x \in \mathbb{R}$, en déduire D_f.

Soit $x \in \mathbb{R}$, $h\ (x) + x = \sqrt{x^2+1} + x > 0$ si $x \geq 0$ et $h\ (x) + x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1-x}} > 0$ si $x < 0$

Alors: $\forall x \in \mathbb{R}$, $h\ (x) + x > 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^*$.

(2) Calculer $g\ (x) + g\ (-x)$ et en déduire que g est impaire et que f est paire.

$g\ (x) + g\ (-x) = \ln\left(x + h\ \ (x)\right) + \ln\left(-x + h\ \ (-x)\right) = \ln\left[\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\right] = \ln 1 = 0$

$\Rightarrow g\ (x) = -g\ (-x) \Rightarrow g$ est impaire.

(3) Vérifier que: $\sqrt{x^2+1}h\ '(x) + x\ h\ (x) = x + x\sqrt{x^2+1}$.

$\sqrt{x^2+1}h\ '(x) + x\ \ h\ \ (x) = \sqrt{x^2+1}h'(x) + xh(x) = \sqrt{x^2+1}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + x\sqrt{x^2+1} = x + x\sqrt{x^2+1}$

Exercice 04: Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$une fonction définie par: $f\ (x) = \frac{\ln(1+x)}{x} si\ x \neq 0$ et $f\ (0) = 1$

Montrer que f est continue en 0.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x-0} \\
&= \frac{1}{1+0} \text{ car la dérivée de } \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ est } \frac{1}{1+x} \\
&= 1 = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue en } 0.
\end{aligned}$$

Exercice05: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$une fonction définie par: $f\ (x) = \frac{\cos x - 1}{x} si\ x \neq 0$ et $f\ (0) = 0$

Montrer que f est continue en 0.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} \\ &= -\sin 0 \text{ car la dérivée de } \cos x \text{ est } \sin x \\ &= 0 = f(0) \Rightarrow f \text{ est continue en } 0.\end{aligned}$$

Exercice06: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$une fonction définie par: $f\ (x) = x - [x]\,, []$ est la partie entière.

Par définition: $[x] = \max \beta$ avec $\beta \leq x$ et $\beta \in \mathbb{Z}$.

Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{Z}$.

Théorème: Si

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \alpha \text{ avec: } \alpha \text{ est une constante unique} \\ &\Rightarrow \forall X_n \text{ une suite avec } x_n \to x_0 \text{ qd } n \to +\infty \\ \text{alors } \lim_{n\to+\infty} f(x_n) &= \alpha\end{aligned}$$

Pour notre problème soit $x_0 \in \mathbb{Z}$, on $f\ (x_0) = x_0 - [x_0] = 0$

Mais si on pose: $x_n = x_0 - \frac{1}{n}$ qui ont des valeurs à gauche de $x_0 \Rightarrow [x_n] = x_0 - 1$

et on a:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to+\infty} x_n - [x_n] = \lim_{n\to+\infty} x_0 - \frac{1}{n} - x_0 - 1 = 1 \neq f(x_0) \\ &\Rightarrow f \text{ est discontinue en tout point de } \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Exercice 07: Peut-on prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes:

$$f\ (x) = \sin x\ \sin\frac{1}{x}, \quad g\ (x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2},\ h(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$$

1) $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ et $f\ (x) = \sin x\ \sin\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin x \sin\frac{1}{x} = 0 \text{ car } \lim_{x\to 0} \sin x = 0 \text{ et } -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$$

Alors le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ existe et il est de la forme:

$$\begin{array}{ccl} F & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F(x) = \begin{cases} \sin x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

2) $g : \mathbb{R} - \{1, -1\} \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to -1} g(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = -\infty$$

Alors le prolongement par continuité n'existe pas.

3) $h : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} h(x) &= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) - \ln\left(\frac{e^0+e^{-0}}{2}\right)}{x-0} \\ &= \left(\frac{e^0 - e^{-0}}{2}\right) = 0 \text{ car: } \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \end{aligned}$$

Alors le prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$ existe et il est de la forme:

$$\begin{array}{ccl} H & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & H(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 08: Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie par: $f\ (x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

L'équation $f\ (x) = 0$ admet-elle une solution?

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(1 - x \ln x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Alors la fonction f est continue dans $]0, +\infty[$ en plus:

$$\left[\lim_{x \to 0} f(x)\right]\left[\lim_{x \to +\infty} f(x)\right] < 0$$

d'après le théorème des valeurs intermédiare: $\exists c \in \left]0,+\infty\right[$ tel que: $f\ (c) = 0$.

Exercice 09:(supp) Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction définie par: $f\ (x) = \mathrm{e}^{-x} \sin x\ - x \cos x$.

L'équation $f\ (x) = 0$ admet-elle une solution dans $\left]0, 2\pi\right[$?

On a: $f\ (\pi) = \pi$ et $f\ (2\pi) = -2\pi$, Alors la fonction f est continue dans $[0, 2\pi]$ en plus:

$$[f\,(\pi)]\,[\ f\,(2\pi)] < 0$$

d'après le théorème des valeurs intermédiare: $\exists c \in \left]0, 2\pi\right[$ tel que: $f\ (c) = 0$.

Exercice 10: En utilisant la définition de la dérivée, trouver la dérivée $f\ '$de f dans les cas suivants (préciser sur quel ensemble f est dérivable):

$$a) f\quad (x) = \frac{2}{(x-3)^2} \quad b)\ (\text{supp})\ g\quad (x) = \sqrt{1+x^2} \quad c) h\ \ (x) = \sin 2x.$$

Par définition:

$$f\ '\,(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f\ \ (x) - f\ \ (x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f\ \ (x_0 + h) - f\ \ (x_0)}{h}$$

En un point x_0 on a:

1)

$$\begin{aligned} f\ '\,(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{f\ \ (x_0 + h) - f\ \ (x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{2}{(x_0+h-3)^2} - \frac{2}{(x_0-3)^2}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2 \frac{\frac{(x_0-3)^2 - (x_0+h-3)^2}{(x_0+h-3)^2 (x_0-3)^2}}{h} = \lim_{h \to 0} 2 \frac{\frac{2(x_0-3)h + h^2}{(x_0+h-3)^2 (x_0-3)^2}}{h} \\ &= \frac{4}{(x_0-3)^3} \end{aligned}$$

Alors: $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$ on a : $f\ '\,(x) = \frac{4}{(x-3)^3}$.

2)

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x_0^2}}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x_0^2}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x_0^2}\right)}\\
&= \lim_{x\to x_0}\frac{x+x_0}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x_0^2}\right)}=\frac{x_0}{\sqrt{1+x_0^2}}
\end{aligned}$$

Alors: $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $g'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

3)

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin 2x-\sin 2x_0}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}2\frac{\sin\left(\frac{2x-2x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{2x+2x_0}{2}\right)}{x-x_0}\\
&= \lim_{x\to x_0}2\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}\cdot\cos(x+x_0)\\
&= 2\cos 2x_0 \text{ , car: } \lim_{x\to x_0}\frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}=1
\end{aligned}$$

Alors: $\forall x\in\mathbb{R}$ on a : $h'(x)=2\cos 2x$

Exercice 11: Démontrer qu'entre deux racines réelles de $e^x\sin x=1$, il existe au moins une racine réelle de $e^x\cos x=-1$.

$e^x\sin x=1\Leftrightarrow\sin x=e^{-x}$. Alors si on pose: $f(x)=\sin x-e^{-x}$ la fonction est continue et dérivable dans $\mathbb{R}$.

Donc si on deux racines de $f(x)\Rightarrow f(a)=f(b)=0$, d'aprés le théorème de Rolle,

$\exists c\in\mathbb{R}$ telle que: $f'(c)=0\Rightarrow\cos c+e^{-c}=0\Rightarrow\cos c=-e^{-c}\Rightarrow e^c\cos c=-1$ d'où l'existence de la racine.

Exercice 12:(supp) Calculer en utilisant la règle de l'hôpital les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x},\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1},\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2,\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi\sin\pi x}{2x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{-\pi^2\cos\pi x}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3\sin 3x}{\cos 3x}}{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x\sin 3x}{3x}}{\frac{2x\sin 2x}{2x}}=\frac{9}{4}.$$

Exercice 13: Soit la fonction :

$$f\ :\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto f\ (x)=\begin{cases} x^2\log|x\ | \text{ si } x\neq 0 \\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$$

(1) Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Remarque: Dans $\mathbb{R}^*$ la fonction est bien définie et elle est de classe $C^{\ 2}$.

Pour $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} x^2\log|x\ | = 0 = f\ (0)$$

Alors f est une fonction continue en 0.

(2) Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Pour $x=0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\ (x)-f\ (0)}{x-0}=\lim_{x\to 0} x\log|x\ | = 0$$

Alors la fonction est dérivable en 0.

(3) La fonction f est-elle de classe $C^{\ 1}$? de classe $C^{\ 2}$? Justifier.

$$\begin{aligned} f\ '(x) &= \begin{cases} 2x\log x + x & \text{si } x>0 \\ 2x\log -x - x & \text{si } x<0\end{cases} = 2x\log|x\ | + |x\ | \text{ si } x\neq 0 \\ \lim_{x\to 0} f\ '(x) &= \lim_{x\to 0} 2x\log|x\ | + |x\ | = 0 = \lim_{x\to 0}\frac{f\ (x)-f\ (0)}{x-0} \end{aligned} \tag{5.6}$$

Alors la première dérivée existe et elle est continue, donc f est de classe $C^{\ 1}$ dans $\mathbb{R}$. Pour la classe $C^{\ 2}$?

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\ '(x)-f\ '(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0} 2\log|x\ | + \frac{|x\ |}{x} = -\infty$$

Ce qui implique que f n'est pas de classe $C^{\ 2}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14:(supp) Soit la fonction :

$$f \ :\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f \ (x) = \begin{cases} x \ \sin\frac{1}{x} \text{ si } \ x \neq 0 \\ 0 \ \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

(1) Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Remarque: Dans $\mathbb{R}^*$ la fonction est bien définie et elle est dérivable.

Pour $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} x \ \sin\frac{1}{x} = 0 = f \ (0) \left(\text{ car:} - 1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \text{ et } \lim_{x\to 0} x = 0 \right)$$

Alors f est une fonction continue en 0.

(2) .

Pour $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f \ (x) - f \ (0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} \text{ n'existe pas.}$$

Alors la fonction n'est pas dérivable en 0.

(3) Les mêmes questions pour la fonction:

$$g \ :\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto g \ (x) = \begin{cases} x^2 \ \sin\frac{1}{x} \text{ si } \ x \neq 0 \\ 0 \ \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

(1) Etudier la continuité de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Remarque: Dans $\mathbb{R}^*$ la fonction est bien définie et elle est de classe C^2.

Pour $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ \sin\frac{1}{x} = 0 = f \ (0) \left(\text{ car:} - 1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1 \text{ et } \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \right)$$

Alors g est une fonction continue en 0.

(2) .

Pour $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\ (x)-f\ (0)}{x-0}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0.\left(\text{ car:}-1\leq \sin\frac{1}{x}\leq 1 \text{ et } \lim_{x\to 0} x=0\right)$$

Alors la fonction est dérivable en 0.

b) g est-elle de classe C^1?

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\Rightarrow \lim_{x\to 0} f'(x) \text{ n'existe pas}$$

Donc g n'est pas de classe C^1, alors elle n'est pas de classe C^2.

Exercice 15: Soient:

$$\begin{array}{lcl} f & : & \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x^5 \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{l} g : \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ x\mapsto \sin\sqrt[5]{x} \end{array}$$

Montrer que f est dérivable en 0 et que g ne l'est pas .

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\ (x)-f\ (0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^5}{x}\lim_{x\to 0} x^4\left(\frac{\sin x^5}{x^5}\right)=0$$

Alors f est dérivable en 0.

$$\lim_{x\to 0}\frac{g\ (x)-g\ (0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^{\frac{1}{5}}}{x}\lim_{x\to 0} x^{\frac{-4}{5}}\left(\frac{\sin x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}}\right)=+\infty$$

Alors g n'est pas dérivable en 0.

Exercice 16: Déterminer $f^{(n)}(x)$ dans les cas suivants: $a)$ $f\ (x)=\cos x,$ $b)$ $f\ (x)=\sin x,$ $c)$(supp)

$f\ \ (x) = \frac{1}{1-x}$.

$$a)\ f'(x) = -\sin x,\ f''(x) = -\cos x,\ f^{(3)}(x) = \sin x, f^{(4)}(x) = \cos x$$
$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ -\sin x & \text{si } n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \\ -\cos x & \text{si } n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ \sin x & \text{si } n = 4k+3, k \in \mathbb{N} \end{cases} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$b)\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x$$
$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } n = 4k, k \in \mathbb{N} \\ \cos x & \text{si } n = 4k+1, k \in \mathbb{N} \\ -\sin x & \text{si } n = 4k+2, k \in \mathbb{N} \\ -\cos x & \text{si } n = 4k+3, k \in \mathbb{N} \end{cases} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$c)\ f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3},\ f^{(3)}(x) = \frac{2 \cdot 3}{(1-x)^4},$$

Donc par récurrence on trouve:

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Exercice 17:

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction:

$$\begin{array}{rcl} f_n & : & [n, n+1] \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log x \end{array}$$

La fonction: $\log x$ est continue dans $[n, n+1]$ et dérivable dans $]n, n+1[$ alors d'après le

théorème des accroissement finis, il existe un $c \in]n, n+1[$ tel que:

$$\begin{aligned} f_n(n+1) - f_n(n) &= (n+1-1) f_n{}'(c) \\ &\Rightarrow \log(n+1) - \log(n) = \frac{1}{c}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

(2) En déduire la nature de la suite de terme général: $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \log(2) - \log(1) &= \frac{1}{c_1} \leq 1, c_1 \in]1,2[\\ \log(3) - \log(2) &= \frac{1}{c_2} \leq \frac{1}{2}, c_2 \in]2,3[\\ &\cdots \\ \log(n+1) - \log(n) &= \frac{1}{c_n} \leq \frac{1}{n}, c_n \in]n, n+1[\end{aligned}$$

Par la somme des deux membres on obtient:

$$\log(n+1) - \log(1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = U_n$$

Passant à la limite on trouve:

$$\lim_{n\to+\infty} \log(n+1) = +\infty \leq \lim_{n\to+\infty} U_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty.$$

Exercice 18:(supp) **(1)** Etudier la dérivabilité de la fonction:

$$f\ \ (x) = x\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} \text{ si } x \neq 1\ ,\ f\ \ (1) = 1$$

Si $x \neq 1$ alors la fonction est dérivable. Pour $x = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to1^+} \frac{f\ \ (x) - f\ \ (1)}{x-1} &= \lim_{x\to1^+} \frac{x\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} \frac{x\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} - 1}{x-1} \\ &= \lim_{x\to1^+} \frac{x(x-1)-1}{x-1} = +\infty \end{aligned}$$

Alors f n'est pas dérivable au point 1.

(2) Determiner a, b tels que: la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par:

$$f\ (x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1\ ,\ f\ (x) = ax^2 + bx + 1 \text{ si non}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le seul problème est le point 1

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f\ (x) - f\ (1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{ax^2 + bx + 1 - a - b - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{ax^2 + bx - a - b}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(ax+b+}{(x-1)}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f\ (x) - f\ (1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

Alors pour que f soit dérivable au point 1, en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$. il suffit que: $2a + b = \frac{1}{2}$.

Exercice19:

(1) Montrer que:

$$\forall x \geq 0,\ x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

(on ne calculera qu'une seule dérivée pour chaque inégalité).

En effet si on pose:

$$f\ (x) = x - \frac{x^2}{2} - \log(1+x) \text{ et } g\ (x) = \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

On trouve:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{(1+x)(1-x) - 1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0 \text{ si } x \geq 0 \\ &\Rightarrow f \text{ est une fonction décroissante} \Rightarrow f\ (x) \leq f\ (0) = 0, \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = \frac{1 + (1+x)\left(-1 + x - x^2\right)}{1+x} = \frac{x^3}{1+x} \geq 0 \\ &\Rightarrow g \text{ est une fonction croissante} \Rightarrow g(x) \geq g\ (0) = 0, \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

Conclusion:
$$\forall x \geq 0,\ x-\frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

(2) En déduire que :
$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

On a:

$$\begin{aligned}\forall x \quad &\geq \quad 0,\ x-\frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3} \\ &\Rightarrow \quad \forall x \geq 0,\ 1-\frac{x}{2} \leq \frac{\log(1+x)}{x} \leq 1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}\end{aligned}$$

d'après la régle d'encadrement on trouve:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Exercice 20: (supp) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$une fonction périodique de période $T > 0$.

(1) On suppose que f a une limite en $+\infty$, montrer que f est constante.

On a:
$$f\ (x+T) = f\ (x), \forall x \in \mathbb{R}$$

On pose:
$$\lim_{x \to +\infty} f\ (x) = \alpha$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que: $f\ (a) \neq \alpha$,la suite $a_n = a + nT$ tend vers $+\infty$ et $f\ (a_n) = f\ (a)$ ce qui donne:

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(a) = \alpha \text{ contradiction avec: } f(a) \neq \alpha \Rightarrow \forall a \in \mathbb{R}, f(a) = \alpha.$$

(2) On suppose que f monotone, montrer que f est constante.

1) Si f est strictement croissante$\Rightarrow \forall x < y \Rightarrow f\ (x) < f\ (y)$ mais il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que: $x + nT > y \Rightarrow f\ (y) < f\ (x+nT) = f\ (x) \Rightarrow f\ (x) < f\ (y) < f\ (x)$ d'où la contradiction.

2) Si f est strictement décroissante$\Rightarrow \forall x < y \Rightarrow f\ (x) > f\ (y)$ mais il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que: $x + nT > y \Rightarrow f\ (y) > f\ (x + nT) = f\ (x) \Rightarrow f\ (x) > f\ (y) > f\ (x)$ d'où la contradiction.

Donc la fonction est constante.

Partie V

Les nombres complexes.

Les propriétés essentielles des nombres complexes ont été étudiées en terminale. On se limitera à quelques rappels et des techniques de calcul.

5.4.1 1.1 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

1) Soient x et y deux nombres réels quelconques, le couple (x, y) est appelé **nombre complexe**,

et on le note par: $z = x + iy$ (c'est l'écriture algébrique de z). Le x désigne la partie réelle du nombre complexe z, par contre le y est la partie imaginaire,

et le i est le nombre imaginaire qui vérifie $(i)^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, le point M d'abscisse x et d'ordonnée y est l'image du nombre complexe z.

On dit encore que M a pour affixe z.

3) Module. Argument

Le nombre complexe z étant différent de $(0, 0)$, l'angle θ est un **argument** de z. Il est défini à $2k\pi$ près. On note:

$$\arg(z) = 2k\pi \quad (2\pi)$$

Le **module** de z est la norme du vecteur OM. On le désigne par:

$$\rho = |z| = ||OM||$$

et on a:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \text{ et } y = \rho\sin\theta \\ \text{ce qui donne } &: \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ d'où l'écriture trigonométrique:} \\ z &= \rho \cdot e^{i\theta} = \rho \cdot (\cos\theta + i\sin\theta) . z \neq 0. \end{aligned}$$

4) Par suite on a les propriétés suivantes:

$$\begin{array}{rcl}
1) \quad |z_1 \cdot z_2| & = & |z_1| \cdot |z_2| \ \text{ et } \ \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad (2\pi) \\
2) \quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| & = & \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \text{et } \ \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \quad (2\pi) \\
3) \quad |z^n| & = & |z|^n \quad \text{et} \quad \arg(z^n) = n \arg(z) \quad (2\pi)
\end{array}$$

5) Nombres complexes conjugués

Le conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ est défini par: $\bar{z} = x - iy$ et on a:

$$|\bar{z}| = |z| \ \text{ et } \ \arg(\bar{z}) = -\arg(z) \ \ (2\pi) \ \text{ si } z \text{ est non nul.}$$

et comme propriété on a:

$$z_1 + z_2 \ = z_1 + z_2 \ , \ z_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot z_2 \text{ et } z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

5.4.2 1.2 CALCUL D'UN MODULE ET L'ARGUMENT D'UNE PUISSANCE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Pour calculer le module et l'argument d'une puissance d'un nombre complexe, on calcul d'abord le module et l'argument de ce nombre, puis on écrit ce nombre sous la forme trigonométrique, et on l'élève à la puissance voulue.

Exemple 62 *Calculer le module et l'argument du nombre complexe* $z = \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{19}$.

On a:

$$\begin{array}{rcl}
\left(1 + i\sqrt{3}\right) & = & 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \\
& \Rightarrow & \left|1 + i\sqrt{3}\right| = 2 \ \ et \ \ \arg\left(1 + i\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{3} \ \ [2\pi] \\
d'où\ z & = & 2^{19} \cdot e^{i\frac{19\pi}{3}} = 2^{19} \cdot e^{i\frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3}} = 2^{19} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} \\
& \Rightarrow & |z| = 2^{19} \ \ et \ \ \arg(z) = \dfrac{\pi}{3} \ \ [2\pi].
\end{array}$$

5.4.3 1.3 SIMPLIFICATION D'UN RAPPORT DE NOMBRES COMPLEXES

Pour simplifier un rapport de nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple 63 *Simplifier le nombre complexe* $z = \frac{3+5i}{(1-i)(2+3i)}$

Alors:

$$\begin{aligned}
z &= \frac{3+5i}{(1-i)(2+3i)} = \frac{(3+5i)(1+i)(2-3i)}{(1-i)(2+3i)(1+i)(2-3i)} \\
&= \frac{(3+5i)(2-3i+2i+3)}{2\cdot 13} = \frac{(3+5i)(5-i)}{26} \\
&= \frac{(15-3i+25i+5)}{26} = \frac{20+22i}{26} = \frac{10}{13} + \frac{11i}{13}.
\end{aligned}$$

5.4.4 1.4 NATURE D'UN NOMBRE COMPLEXE

Soit $z = x + iy, x$ et $y \in \mathbb{R}$ un nombre complexe.

1.4.1 Un nombre complexe réel

On dit que z est un nombre réel si l'un des cas suivants est vérifies:

1) Si la partie imaginaire est nulle.

2) Si z est égal à son conjugué.

3) L'argument de z est congru à 0 modulo π.

Exemple 64 *Soit* $z = i\left(\frac{1+e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right)$ *avec* $\alpha \notin 2\pi\mathbb{Z}$.*En effet:*

$$\begin{aligned}
\bar{z} &= -i\left(\frac{1+e^{-i\alpha}}{1-e^{-i\alpha}}\right) \\
&= -i\cdot\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\alpha}}\left(\frac{1+e^{-i\alpha}}{1-e^{-i\alpha}}\right) \\
&= i\left(\frac{1+e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}}\right) = z \\
&\Rightarrow z \text{ est un nombre réel.}
\end{aligned}$$

1.4.2 Un nombre complexe non nul imaginaire pur

$z \neq 0$ est un nombre imaginaire pur si l'un des cas suivants est vérifies:

1) Si la partie réelle est nulle.

2) Soit z est égal à l'opposé de son conjugué.

3) L'argument de z est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

Exemple 65 *Soit* $z = i + \frac{1}{2i}$ *on a alors:*

$$\begin{aligned} \bar{z} &= -i + \frac{1}{-2i} = -z \\ &\Rightarrow z \textit{ est un nombre imaginaire pur.} \end{aligned}$$

5.4.5 1.5 RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE

Pour déterminer les racines carrées d'un nombre complexe $z = x + iy$, on cherche les nombres α et β tels que:

$$(\alpha + i\beta)^2 = x + iy$$

d'où le système:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = x \\ \alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(équation entre les deux modules)} \\ 2\alpha\beta = y. \end{cases}$$

ce qui permet de définir α^2 et β^2 puis α, β en utilisant le signe entre α et β.

Exemple 66 *Calculer les racines carrées de* $z = 3 - 4i$.

On résout le système suivant:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = 3 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 5 \\ 2\alpha\beta = -4. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 2\alpha^2 = 8 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \\ et\ \beta^2 &= 1\ mais\ \alpha\beta < 0 \\ d'où\ les\ racines\ sont &: \quad z_1 = 2 - i\ et\ z_2 = -2 + i\ . \end{aligned}$$

5.4.6 1.6 RACINES n-IÈMES D'UN NOMBRE COMPLEXE NON NUL

Pour trouver l'ensemble des racines n-ièmes de $z \neq 0$, on commence d'abord par le mettre sous forme trigonométrique, en suite on cherche une racine n-ième, puis on multiplie par les racines n-ièmes de l'unité $\left(1 = e^{i2k\pi}\right)$ $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$.

Exemple 67 *Trouver les racines cubiques de* $z = 4\sqrt{2}\,(1+i)$.

En effet:

$$\begin{aligned} 1)\ La\ forme\ trigonométrique\ de\ z\ est &: \\ z &= 4\sqrt{2}\,(1+i) = 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 8 \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}. \\ 2)\ Une\ racine\ n\text{-}ième\ de\ z\ est &: \\ z_0 &= (8)^{\frac{1}{3}} \cdot e^{i\frac{\pi}{12}} = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{12}}. \\ 3)\ d'où\ les\ racines\ cubiques\ de\ z &: \\ z_k &= z_0 \cdot u_k \\ &= 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{12}} \cdot e^{i\frac{2k\pi}{3}} \\ &= 2 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \\ avec\ k &= \{0, 1, 2\}. \end{aligned}$$

5.4.7 1.7 FACTORISATION D'UN POLYNÔME RÉEL

Remarque 68 *Quand on cherche à factoriser un polynôme réel P et qu'on a trouvé une racine imaginaire z, alors $\bar{z}$ est aussi une racine de P.*

Exemple 69 *Factoriser le polynôme: $P = z^3 - z^2 + z - 1$.*

Comme $z_1 = i$ est une racine alors $z_2 = -i$ est aussi une racine et par suite par la méthode d'identification on trouve la troisième racine.

$$P = (z - i)(z + i)(z - 1).$$

5.4.8 1.8 LA FORMULE D'EULER

La formule d'Euler est l'écriture des deux fonction $\cos inus$ et $\sin us$ en fonction des fonctions exponentielle qui est utile pour linéariser les expressions

sous la forme $\cos^m x \sin^n x$ avec $m, n \in \mathbb{N}$ et dans le chapitre des intégrales par exemple. Alors on a:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Exemple 70 *Linéariser* $\cos x \sin^2 x$.

$$\begin{aligned} \cos x \sin^2 x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{8}\left(e^{i3x} - e^{ix} - e^{-ix} + e^{-i3x}\right) \\ &= -\frac{1}{4}(\cos 3x - \cos x). \end{aligned}$$

5.4.9 1.9 LA FORMULE DE MOIVRE

Pour calculer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et $\sin x$, on utilise la formule de moivre:

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

Exemple 71

$$\begin{aligned}
\cos 5x &= \operatorname{Re}\left(e^{5ix}\right) \;\; \textit{et} \;\; \sin 5x = \operatorname{Im}\left(e^{5ix}\right) \\
\textit{donc} &: (\cos x + i\sin x)^5 \\
&= \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x + i\left(5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x\right) \\
&\Rightarrow \begin{cases} \cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x \\ \sin 5x = 5\cos^4 x\sin x - 10\cos^2 x\sin^3 x + \sin^5 x \end{cases}.
\end{aligned}$$

5.4.10 1.10 SIMPLIFICATION DE SOMMES DE COSINUS OU BIEN SINUS

Pour simplifier une somme de cosinus (resp. de sinus) on introduit les fonctions exponentielles qui est par suite une somme d'une suite géomérique.

Simplifier:

$$S_n = 1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx.$$

En effet:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n} e^{i(kx)} = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n} e^{(ix)^k}$$

c'est une suite géométrique dans le premier terme est 1 et de raison e^{ix}. Alors:

$$\begin{aligned}
1) \text{ si } x &\in 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow S_n = n+1 \\
2)\text{si } x &\notin 2\pi\mathbb{Z} \Rightarrow S_n = \operatorname{Re}\left[\frac{1-e^{ix(n+1)}}{1-e^{ix}}\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[e^{i\left(\frac{nx}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right] \\
&= \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

De même:

$$\sum_{k=0}^{n} \sin kx = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \cdot \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

5.5 Exercices:

Exercice 01: Déterminer le module et un argument des nombres complexes:

$$a)1+i\ \sqrt{3},\ 2-2i.$$

$$\text{(supp) } b)\ 3+i\sqrt{3},\ \ -1+i\sqrt{3},\ \left(-1+i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6,\ \cos(-\alpha)+i\sin\alpha\ \ \text{pour } \alpha\in\mathbb{R}.$$

Exercice 02: Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^2-2z\ (\cos\theta+i\sin\theta)+2i\ \sin\theta\ (\cos\theta+i\sin\theta)=0,\theta \text{ étant un paramètre réel.}$$

Exercice 03:

(1) Calculer les deux sommes:

$$\begin{aligned} a)\ U_n &= 1+a\ \cos\theta+a^2\ \cos 2\theta+...+a^n\ \cos n\ \theta. \\ b)\ U_n &= 1+a\ \sin\theta+a^2\ \sin 2\theta+...+a^n\ \sin n\ \theta. \end{aligned}$$

et leurs limites$U$ et V lorsque $n\to+\infty$.

(2) Quelle condition faut-il imposer à z pour que:$|z+5|=|z-i\ |$?

Exercice 04: **a)** Déterminer les racines cubiques de:

$$z_1=1+i,\ \text{(supp)et } z_2=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

b) Si $t\in\mathbb{R}$, déterminer les racines $n^{ièmes}$ de $z_3=\frac{1+it}{1-it}$.

Exercice 05: Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z^2+z+1 &= 0,\ \text{(supp)}z^2+z-1=0,\text{(supp) } 4z^2-10z+4=0,\text{(supp) } z^2=z-2 \\ z^4 &= 1,\text{(supp) } z+2+z^2=3z,\ \text{(supp)}\bar{z}^2-\bar{z}+1=0,\ \text{(supp)}z^4+z^2-12=0. \end{aligned}$$

Exercice 06: Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $z = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ est de module1. Pour quels $z \in \mathbb{C}$, existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que: $z = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$

Partie VI

Structures algébriques.

Les notions qui suivent présentent de l'intérêt sur le plan terminologique que structurel avant d'aborder l'étude des espaces vectoriels.

5.5.1 1.1 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS

1.1.1 Loi de composition interne

Soient E et F deux ensembles non vides, et f une application de $E \times E$ dans F. Si $f\ (E \times E)$ est inclus dans E, alors f est une loi de composition interne sur E. Qu'on la note:

$$x * y \text{ ou } x \top y \text{ ou } x \perp y...$$

Exemple 72 *L'addition et la multiplication sont des lois de composition internes sur* $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ *mais la soustraction n'est pas interne sur* $\mathbb{N}$.

1.1.2 Commutativité

Une loi de composition interne $*$ sur E est dite **commutative** si:

$$\text{pour tout } x, y \in E, x * y = y * x.$$

Exemple 73 *L'intersection et la réunion sont des lois de composition internes commutatives sur l'ensemble des parties d'un ensemble.*

1.1.3 Associativité

Soit $*$ une loi de composition interne définie sur un ensemble E. $*$ est **associative** ssi:

$$\text{pour tout } x, y, z \in E, x * (y * z) = (x * y) * z.$$

Exemple 74 *La composition des applications est une loi de composition interne associative. Par contre la loi de composition* $*$ *définie dans* $\mathbb{Q}$ *par:*

$$x * y = \frac{x + y}{2} \text{ n'est pas associative.}$$

1.1.4 Elément neutre

Soit $*$ une loi de composition interne définie sur un ensemble E. e est un **élément neutre** pour la loi $*$ dans l'ensemble E ssi:

$$\forall x \in E, x * e = e * x = x.$$

Si, on outre, la loi $*$ est commutative, il suffit de montrer que:

$$\forall x \in E, x * e = x \text{ ou bien } e * x = x.$$

Exemple 75 *1 est un élément neutre de la multiplication dans* $\mathbb{R}$.

Proposition 76 *Si l'élément neutre existe alors il est unique.*

Preuve: Supposons par absurde qu'ils existent deux élément neutres e_1, e_2 avec $e_1 \neq e_2$.

Par définition de l'élément neutre on a:

$$\begin{aligned} \forall x &\in E, x * e_1 = x \Rightarrow e_2 * e_1 = e_2 \\ \text{et } \forall x &\in E, e_2 * x = x \Rightarrow e_2 * e_1 = e_1 \\ &\Rightarrow e_1 = e_2. \end{aligned}$$

■

1.1.5 Elément symétrique

Soit $*$ une loi de composition interne définie sur un ensemble E et admettant un élément neutre e.

Deux éléments x et x' sont **symétriques** pour la loi $*$ si:

$$x * x' = x' * x = e.$$

Si, on outre, la loi $*$ est commutative, il suffit de trouver $x' \in E$ tel que:

$$x * x' = e \text{ ou bien } x' * x = e$$

Exemple 77 *Le symétrique de x dans $\mathbb{Z}$ muni de l'addition est:*$(-x)$.

Proposition 78 *Si la loi $*$ est associative, alors si l'élément symétrique existe il est unique.*

1.1.6 Elément régulier

On dit que α est un élément **régulier** pour une loi $*$ de composition interne définie sur un ensemble E s'il vérifie:

$$\begin{aligned} \forall x, y &\in E, (x * \alpha = y * \alpha) \Rightarrow x = y \\ \text{et } \forall x, y &\in E, (\alpha * x = \alpha * y) \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Si, on outre, la loi $*$ est commutative, il suffit de vérifier l'un des deux implication.

Exemple 79 *Dans $\mathbb{C}$ muni de l'addition, tout élément est régulier.*

1.1.7 Distributivité

Soient $*$ et $\triangle$ deux lois de composition internes sur un ensemble E. Alors $*$ est **distributiv**e par rapport à $\triangle$ ssi:

$$\begin{aligned} \forall x, y, z &\in E,\ x * (y \triangle z) = (x * y) \triangle (x * z) \\ \text{et } (y \triangle z) * x &= (y * x) \triangle (z * x) \end{aligned}$$

Si, on outre, la loi $*$ est commutative, il suffit de montrer l'un des deux égalité.

Exemple 80 *La multiplication est distributive par rapport à l'addition dans $\mathbb{C}$.*

1.1.8 Partie stable

Soit $*$ une loi de composition interne définie sur un ensemble E.

Une partie A est dite **stable** de E pour la loi $*$, si pour tout $x, y \in A$, $x * y \in A$.

Exemple 81 *L'ensemble des entiers naturels pairs est stable pour l'addition, par contre l'ensemble des entiers impairs n'est pas stable pour l'addition car:*

$$(3) + (5) = 8 \text{ qui est pair.}$$

1.1.9 Loi de composition externe

Soient E, F, Ω trois ensembles non vides, et f une application de $\Omega \times E$ dans F.

f est une loi de composition externe sur E à opérateurs dans Ω, ssi:

$$\begin{aligned} \forall\alpha &\in \Omega, x \in E \Rightarrow f\ (\alpha, x) \in E. \\ f\ (\alpha, x) \text{ est souvent notée } &: \alpha \cdot x. \end{aligned}$$

Exemple 82 *Dans l'ensemble des vecteurs la multiplication par un scalaire est une loi de composition externe.*

5.5.2 1.2 Structure de groupe

1.2.1 Définition d'un groupe

Un ensemble G muni d'une loi de composition interne $*$ est un **groupe** si on a les trois propriétés suivantes:

1- $*$ est associative.

2- G admet un élément neutre correspond à $*$.

3- Chaque élément de G possède un symétrique par rapport à $*$.

Si de plus: $*$ est commutative alors le groupe est dit un **groupe commutatif** ou bien un **groupe abélien**.

Exemple 83 $(\mathbb{Z}, +)$ *est un groupe commutatif.*

1.2.2 Propriétés des groupes

Les définitions précédentes découlent les propriétés suivantes:

1- L'élément neutre d'un groupe est unique.

Preuve: Par absurde supposons qu'ils existent deux élément neutre e_1 et e_2 alors:

$$\begin{aligned} e_1 * e_2 &= e_1 \text{ car } e_2 \text{ est un élément neutre,} \\ \text{et } e_1 * e_2 &= e_2 \text{ car } e_1 \text{ est un élément neutre,} \\ \text{alors } &: e_1 = e_2. \end{aligned}$$

■

2- Le symétrique d'un élément est unique, noté x^{-1}.

3-

$$\forall x \in G, \forall y \in G; \quad \left(x^{-1}\right)^{-1} = x \text{ et } (x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}.$$

1.2.3 Sous-groupe

Soit $(G, *)$ un groupe. Une partie H non vide de G muni de la loi $*$ est dite un **sous-groupe** ssi:

1- H contient l'élément neutre.

2-

$$\forall x \in H, \forall y \in H; \ x * y \in H.$$

3-

$$\forall x \in H; \ x^{-1} \in H.$$

Exemple 84 *On appelle le centre d'un groupe G l'ensemble définie par:*

$$C = \{x \in G \text{ tel que: } \forall y \in G; x * y = y * x\}.$$

Montrons alors que: $(C, *)$ est un sous-groupe de G.

1- On a: $\forall x \in G; x * e = e * x \Rightarrow e \in C$.

2- $\forall x_1 \in C, \forall x_2 \in C$*; alors:*

$$\begin{aligned}
\forall y &\in G, (x_1 * x_2) * y = x_1 * (x_2 * y) \quad \textit{(l'associativité)}, \\
&= x_1 * (y * x_2) \quad \textit{(} x_1 \in C\textit{)}, \\
&= (x_1 * y) * x_2 \quad \textit{(l'associativité)}, \\
&= (y * x_1) * x_2 \quad \textit{(} x_1 \in C\textit{)}, \\
&= y * (x_1 * x_2) \quad \textit{(l'associativité)}, \\
&\Rightarrow x_1 * x_2 \in C.
\end{aligned}$$

3-

$$\begin{aligned}
\forall x &\in C, \forall y \in G;\ x^{-1} * y = \left(y^{-1} * x\right)^{-1} = \left(x * y^{-1}\right)^{-1} \quad (\textit{ car: } x \in C) \\
&= y * x^{-1} \Rightarrow\ x^{-1} \in C.
\end{aligned}$$

Conclusion: $(C, *)$ *est un sous-groupe de* G*.*

1.2.4 Propriétés des sous-groupes

1- l'intersection des sous-groupes est un sous groupe, mais la réunion n'est pas un sous-groupe.

Pour la preuve il suffit d'utiliser les propriétés des sous-groupes. Mais pour le contre exemple: On a:

$$\begin{aligned}
& (2\mathbb{Z}, +), (3\mathbb{Z}, +) \text{ sont deux sous-groupe de } \mathbb{Z}. \\
\text{Par contre} &: (2\mathbb{Z}, +) \cup (3\mathbb{Z}, +) \text{ n'est pas un sous-groupe de } \mathbb{Z} \\
\text{car} &: 2, 3 \in (2\mathbb{Z}, +) \cup (3\mathbb{Z}, +) \text{ mais } 2 + 3 = 5 \notin (2\mathbb{Z}, +) \cup (3\mathbb{Z}, +).
\end{aligned}$$

1.2.5 Homomorphisme de groupes

Soient $(G, *)$ et $(G', \triangle)$ deux groupes, un **homomorphisme** f de $(G, *)$ vers $(G', \triangle)$ est une application:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad G \to G' \\ x \quad &\mapsto \quad f\ (x) = x' \end{aligned}$$

telle que:

$$\forall x \in G, \forall y \in G \quad f\ (x * y) = f\ (x) \triangle f\ (y)$$

Exemple 85

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \left(\mathbb{R}_+^*, \times\right) \to (\mathbb{R}, +) \\ x \quad &\mapsto \quad f\ (x) = \ln x. \end{aligned}$$

est un homomorphisme.

5.5.3 1.3 Structure d'anneau

$(A, *, \triangle)$ est un **anneau** si:

1) $(A, *)$ est un groupe commutatif.

2) $\triangle$ posséde un élément neutre et elle est associative.

3) La loi $\triangle$ est distributive sur la loi $*$.

Si de plus la loi $\triangle$ est commutative, l'anneau est commutatif.

5.5.4 1.4 Corps

1.4.1 élément inversible

Un élément $x \in K$ est **inversible** par rapport à la loi $\triangle$ s'il existe un élément $y \in K$ telle que:

$$x \triangle y = y \triangle x = e_2\ , (e_2 \text{ est l'élément neutre par rapport à } \triangle)$$

1.4.2 Structure d'un corps

On dit que $(K, *, \triangle)$ est un **corps** si:

1) $(K, *, \triangle)$ est un anneau.

2) Tout élément distinct de e (opération $*$) est inversible pour la loi $\triangle$.

Si de plus $\triangle$ est commutative, on parle de corps commutatif.

Exemple 86 $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un corps commutatif, mais* $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *n'est pas un corps.*

5.6 Exercices

Exercice 01: Donner le D.L à l'ordre 3 et à l'ordre 4 au voisinage de 0 de f dans les cas suivants:

(1) $f\ (x) = 2 + x^2 - 2x^3 + 5\ x^4$

(2) $f\ (x) = \frac{1}{1+x}$

(3) $f\ (x) = \ln\left(1 + 3x^2\right)$

(4) $f\ (x) = e^{x^4}\left(x^3 - x - 1\right)$

Exercice 02: **(1)** Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f dans les cas suivants:

a) $f\ (x) = e^x \sin x$, b) $f\ (x) = \frac{\ln(1+x)}{\cos x}$ c) $f\ (x) = (1 + \cos x)\sqrt{x+1}$ d) $f\ (x) = \sqrt{x^2 + e^{-x}}$

(2) Calculer le développement limité à l'ordre 2 au point x=1 de la fonction g définie par:

$$g\ (x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

Exercice 03:

(1) Calculer le développement limité à l'ordre 2 au point x=0 de la fonction f définie par:

$$f\ (x) = \ln(1 + x) + \sqrt[3]{1 + x}$$

(2) En utilisant la notion du D.L, calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}, \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}, \text{(Supp)} \lim_{x\to 0}\frac{9\sqrt[3]{1+x}+x^2-3x-9}{x^3}$$
$$\text{(Supp)} \lim_{x\to +\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}, \text{(Supp)} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}-1}{x}$$

(3) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 puis interpréter pour le prolongement par continuité, la dérivabilité, la position par rapport à la tangente dans les cas suivants:

$$\text{a) } f\ (x)=\frac{e^x-1}{x} \quad \text{b) (supp) } f\ (x)=\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$$

(4) (supp) Calculer le développement limité à l'ordre 2 au point 0 de la fonction f définie par:

$$f\ (x)=\frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{x}}{x}$$

En déduire que f se prolonge en une fonction g continue et dérivable sur $]-1,+\infty[$. Donner les valeurs de $g(0)$ et $g'(0)$.

(5) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de la fonction g définie par:

$$g\ (x)=\left(1+x+x^2\right)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 04: Sur $\mathbb{R}-\{1\}$ on définit la loi $*$ comme suit:

$$x*y=x+y+xy$$

(1) Vérifier que $*$ est une loi de composition interne.

(2) Montrer que $(\mathbb{R}-\{1\},*)$ est un groupe commutatif.

(3) Résoudre l'équation: $2*3*x*5=5*3$.

Exercice 05: Soit $(G,*)$ un groupe, H_1, H_2 deux sous groupes de G.

(1) Montrer que $H_1 \cap H_2$ est aussi un sous groupe de G.

(2) Donner un exemple où $H_1 \cup H_2$ n'est pas un sous groupe de G.

(3) On note $C = \{x \in G; \forall y \in G, x * y = y * x\}$ le centre de G. Montrer que C est un sous groupe de G.

Exercice 06:

(1) Exprimer $\sin 2x$ et $\cos 2x$ en fonction de $\tan x$.

(2) calculer les réels x et y tels que $\arcsin x = 2 \arctan \frac{3}{4}$ et $\arccos y = 2 \arctan \frac{3}{4}$.

Exercice 07: Simplifier les expressions suivantes:

$$\sin(2 \arcsin x), \cos(2 \arcsin x), \cos(3 \arctan x) \text{ et } \cos^2\left(\frac{1}{2} \arctan x\right)$$

Exercice 08:

(1) Vérifier que: Si $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, alors $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.

(2) Montrer que: $2 \arctan\left(\sqrt{1 + x^2} - x\right) + \arctan x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 09: Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 10: Montrer que si x et $y \in \mathbb{R}$ avec $xy \neq 1$:

$$\begin{aligned} \arctan x + \arctan y &= \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right) + k\pi \\ \text{avec} \quad : \quad k &= \begin{cases} 0 \text{ si } xy < 1 \\ 1 \text{ si } xy > 1 \text{ , } x > 0 \text{ et } y > 0 \\ -1 \text{ si } xy > 1 \text{ , } x < 0 \text{ et } y < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

5.7 Le corrigé:

Exercice 01: Donner le D.L à l'ordre 3 et à l'ordre 4 au voisinage de 0 de f dans les cas suivants:

(1) $f\ (x) = 2 + x^2 - 2x^3 + 5\ x^4$

$f\ (x) = 2 + x^2 - 2x^3 + x^3\varepsilon\,(x)$ avec $\varepsilon\,(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 3).

$f\ (x) = 2 + x^2 - 2x^3 + 5\ x^4$ (à l'ordre 4). **(le reste est nul)**

(2) $f\ (x) = \frac{1}{1+x}$ on a:

$$f\ '(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, f\ ''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, f\ ^{(3)}(x) = -\frac{2.3}{(1+x)^3} \text{ et } f\ ^{(4)}(x) = \frac{2.3.4}{(1+x)^5}$$

Alors:$f\ (x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_1\,(x)$ avec $\varepsilon_1\,(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 3).

:$f\ (x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + x^4\varepsilon_2\,(x)$ avec $\varepsilon_2\,(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 4).

(3) $f\ (x) = \ln\left(1 + 3x^2\right)$ **la notion du composé**

On a: $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + u^4\varepsilon\,(u)$ avec $\varepsilon\,(u) \to 0$ qd $u \to 0$ (à l'ordre 4).

$\Rightarrow f\ (x) = 3x^2 + x^3\varepsilon_1\,(x)$ avec $\varepsilon_1\,(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 3).

et $f\ (x) = 3x^2 - \frac{1}{2}\left(3x^2\right)^2 + x^4\varepsilon_1\,(x) = 3x^2 - \frac{9}{2}x^4 + x^4\varepsilon_1\,(x)$ avec $\varepsilon_2\,(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 4).

(4) $f\ (x) = e^{x^4}\left(x^3 - x - 1\right)$ **la notion du produit**

On a: $e^u = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + \frac{1}{4!}u^4 + u^4\varepsilon\,(u)$ avec $\varepsilon\,(u) \to 0$ qd $u \to 0$ (à l'ordre 4).

$\Rightarrow e^{x^4} = 1 + x^4 + x^4\varepsilon\,(x) \to 0$ qd $u \to 0$ (à l'ordre 4).

$\Rightarrow f\ (x) = -1 - x + x^3\ + x^3\varepsilon_1\,(x)$ avec $\varepsilon_1\,(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 3).

et $f\ (x) = -1 - x + x^3 - x^4\ + x^4\varepsilon_2\,(x)$ avec $\varepsilon_2\,(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 4).

Exercice 02: **(1)** Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction f dans les cas suivants:

a) $f\ (x) = e^x \sin x$, on a: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + x^2\varepsilon_1\,(x)$ avec $\varepsilon_1\,(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2).

et $\sin x = x + x^2\varepsilon_2\,(x)$ avec $\varepsilon_2\,(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2).

$\Rightarrow f\ (x) = x + x^2 + x^2\varepsilon\,(x)$ avec $\varepsilon\,(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2).

b) $f\ (x) = \frac{\ln(1+x)}{\cos x}$, on a: $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2).

et $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2),

alors après la division suivant les puissances croissantes on trouve:

$f\ (x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2).

c) $f\ (x) = (1+\cos x)\sqrt{x+1}$, on a: $(1+\cos x) = 2 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2),

et $\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2), **(la notion du produit)**

$\Rightarrow f\ (x) = 2 + x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = 2 + x - \frac{3x^2}{4} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2).

d) $f\ (x) = \sqrt{x^2 + e^{-x}}$, on a: $e^u = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + u^2\varepsilon_1(u)$ avec $\varepsilon_1(u) \to 0$qd $u \to 0$ (à l'ordre 2).

$\Rightarrow e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2!}x^2 + x^2\varepsilon_2(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2)

$\Rightarrow x^2 + e^{-x} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$ avec $\varepsilon_2(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2)

mais: $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + u^2\varepsilon_3(x)$ avec $\varepsilon_3(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2), **la notion du composé**

$f\ (x) = 1 + \frac{1}{2}\left(-x + \frac{3}{2}x^2\right) - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) = 1 + -\frac{x}{2} + \frac{5}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2).

(2) Calculer le développement limité à l'ordre 2 au point x=1 de la fonction g définie par:

$$g\ (x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_1((x-1))$ avec $\varepsilon_1((x-1)) \to 0$ qd $x \to 1$ (à l'ordre 2).

et $x^2 = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon_2((x-1))$ avec $\varepsilon_2((x-1)) \to 0$ qd $x \to 1$ (à l'ordre 2).

alors après la division suivant les puissances croissantes de $(x-1)$ on trouve:

$g\ (x) = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + (x-1)^2\varepsilon((x-1))$ avec $\varepsilon((x-1)) \to 0$ qd $x \to 1$ (à l'ordre 2).

Exercice 03:

(1) Calculer le développement limité à l'ordre 2 au point x=0 de la fonction f définie par:

$$f\ (x) = \ln(1+x) + \sqrt[3]{1+x}$$

On a: $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon_1(x)$ avec $\varepsilon_1(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2)

et $\sqrt[3]{1+x}$=1+1$_{3x-\frac{1}{9}x^2+x^2\varepsilon_2(x)}$ avec $\varepsilon_2(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2) ce qui implique que:

$f\ (x) = 1 + \frac{4}{3}x - \frac{11}{18}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ qd $x \to 0$ (à l'ordre 2)

(2) En utilisant la notion du D.L, calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}, \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}, \text{(Supp)} \lim_{x\to 0}\frac{9\sqrt[3]{1+x}+x^2-3x-9}{x^3}$$
$$\text{(Supp)} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}, \text{(Supp)} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sqrt{1+x}}-1}{x}$$

En effet:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\left[x-\frac{1}{2}x^2+x^2\varepsilon(x)\right]} = e$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\tan x\ \ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{-\tan x\ \ln x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} e^{-\left(x+x^2\varepsilon(x)\right)\ \ln x} = 1\end{aligned}$$

(3) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 puis interpréter pour le prolongement par continuité, la dérivabilité, la position par rapport à la tangente dans les cas suivants:

$$\text{a)}\ \ f\ (x) = \frac{e^x-1}{x} \quad \text{b) (supp)}\ f\ (x) = \frac{\ln(1+x)}{\sin x}$$

$$\frac{e^x-1}{x} = \frac{\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+x^4\varepsilon(x)\right)-1}{x} = 1+\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^3+x^3\varepsilon(x)$$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ qd x

Alors f est prolongeable par continuité avec:

$$F \quad : \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \quad \mapsto \quad \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \quad \text{est le prolongement de } f.$$

qui est dérivable dans $\mathbb{R}$ en particulier en 0 avec $F'(0) = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$. En plus l'équation de la tangente est: $y = \frac{1}{2}x + 1$ mais:

$\frac{e^x-1}{x} = 1 + \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}\mathbf{x}^2 + \frac{1}{4!}x^3 + x^3\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ qd $x \to 0$ donc puisque le terme d'ordre 2 est positif alors le graphe de la fonction est au-dessus de la tangente.

(4) (supp) Calculer le développement limité à l'ordre 2 au point 0 de la fonction f définie par:

$$f\ (x) = \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{x}}{x}$$

En déduire que f se prolonge en une fonction g continue et dérivable sur $]-1, +\infty[$. Donner les valeurs de $g(0)$ et $g\,'(0)$.

(5) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de la fonction g définie par:

$$g\ (x) = \left(1 + x + x^2\right)^{\frac{1}{x}}$$

$g\ (x) = \left(1 + x + x^2\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+x+x^2\right)}$

On a: $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + u^4\varepsilon(u) \to 0$ qd $u \to 0$ (à l'ordre 4), donc si on pose: $u = x + x^2$

on trouve: $\ln\left(1 + x + x^2\right) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} + x^4\varepsilon_1(x)$ (on tronque que les termes d'ordre ≤ 4)

$\Rightarrow \frac{1}{x}\ln\left(1 + x + x^2\right) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{2}{3}x^2 + \frac{x^3}{4} + x^3\varepsilon_1(x)$ mais: $e^u = 1 + u + \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{3!}u^3 + u^3\varepsilon_2(u)$ avec $\varepsilon_2(u) \to 0$ qd $u \to 0$ (à l'ordre 3).

$\Rightarrow e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+x+x^2\right)} = e^{1+\frac{x}{2}-\frac{2}{3}x^2+\frac{x^3}{4}+x^3\varepsilon_1(x)} = e\ e^{\frac{x}{2}-\frac{2}{3}x^2+\frac{x^3}{4}+x^3\varepsilon_1(x)}$

Donc il suffit de remplaçer dans le D.L de e^u le u par $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}x^2 + \frac{x^3}{4}\right)$(on tronque que les termes d'ordre ≤ 3)

$\Rightarrow g\ (x) = e\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{13}{24}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon\ (x)\right)$

Exercice 04: Sur $\mathbb{R} - \{1\}$ on définit la loi $*$ comme suit:

$$x * y = x + y - xy$$

(1) Vérifier que $*$ est une loi de composition interne.

Montrons que: $\forall x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$ alors: $x * y \in \mathbb{R} - \{1\} \Leftrightarrow x + y - xy \neq 1$

Si $x + y - xy = 1 \Rightarrow x + y - xy - 1 = 0 \Rightarrow (1 - x)(y - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $y = 1$ (contradiction)

Alors $*$ est une loi de composition interne.

(2) Montrer que $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ est un groupe commutatif.

a) Montrons que $*$ est associative$\Leftrightarrow \forall x, y, z \in \mathbb{R} - \{1\}$; $(x * y) * z = x * (y * z)$?

Soient $x, y, z \in \mathbb{R} - \{1\}; (x * y) * z = (x + y - xy) * z = (x + y - xy) + z - (x + y - xy)\, z$

et $x * (y * z) = x * (y + z - yz) = x + (y + z - yz) - x\,(y + z - yz)$ (par identification des deux résultats)

$\Rightarrow (x * y) * z = x * (y * z)$

b) Montrons que $*$ est commutative$\Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$; $x * y = y * x$

Soient $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}; x * y = x + y - xy = y + x - yx = y * x$

Alors $*$ est une loi commutative.

c) Montrons que $*$ admet un élément neutre$\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R} - \{1\}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$; $x * e = e * x = x$?

Puisque $*$ est commutative alors il suffit de montrer que: $x * e = x$

$x * e = x \Leftrightarrow x + e - xe = x \Rightarrow e\,(1 - x) = 0 \Rightarrow e = 0$ car $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

d) Montrons que chaque élément $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ admet un élément symétrique noté x^{-1} tel que: $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e = 0$

Puisque $*$ est commutative alors il suffit de résoudre l'équation $x * x^{-1} = 0 \Leftrightarrow x + x^{-1} - x$
$x^{-1} = 0 \Leftrightarrow x + x^{-1}(1-x) = 0 \Rightarrow x^{-1} = \frac{x}{x-1}$

qui est bien défini car $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Conclusion: $(\mathbb{R} - \{1\}, *)$ est un groupe commutatif.

(3) Résoudre l'équation: $2 * 3 * x * 5 = 5 * 3$.(utilisant la notion de l'élément symétrie)

$2 * 3 * x * 5 = 5 * 3 \Leftrightarrow 3 * x * 5 = 2 * 5 * 3 \Leftrightarrow x * 5 = \frac{3}{2} * 2 * 5 * 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} * 2 * 5 * 3 * \frac{5}{4}$
$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2} * (-3) * 3 * \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} * 9 * \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = (-3) * \frac{5}{4} = 2$

Exercice 05: Soit $(G, *)$ un groupe, H_1, H_2 deux sous groupes de G.

(1) Montrer que $H_1 \cap H_2$ est aussi un sous groupe de G.

a) Montrons que $H_1 \cap H_2$ contient l'élément neutre?

H_1, H_2 sont deux sous groupes de G et l'élément neutre de G unique$\Rightarrow e \in H_1$ et $e \in H_2 \Rightarrow e \in H_1 \cap H_2$.

b) Montrons que: $\forall x \in H_1 \cap H_2, \forall y \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x * y \in H_1 \cap H_2$?

Soient $x, y \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x, y \in H_1$ et $x, y \in H_2 \Rightarrow x * y \in H_2$ et $x * y \in H_2$ car H_1, H_2 sont deux sous groupes de $G \Rightarrow x * y \in H_1 \cap H_2$.

c)

2-Montrons que: $\forall x \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x^{-1} \in H_1 \cap H_2$?

Soit $x \in H_1 \cap H_2 \Rightarrow x \in H_1$ et $x \in H_2$ puisque l'élément symétrique est unique et H_1, H_2 sont deux sous groupes de G

alors: $x^{-1} \in H_1$ et $x^{-1} \in H_2 \Rightarrow x^{-1} \in H_1 \cap H_2$.

Conclusion: $H_1 \cap H_2$ est aussi un sous groupe de G.

(2) Donner un exemple où $H_1 \cup H_2$ n'est pas un sous groupe de G.

Si on pose: $G = \mathbb{Z}, H_1 = \{2k, k \in \mathbb{Z}\}$ et $H_2 = \{3k, k \in \mathbb{Z}\}$. Alors: $(G, +)$ est un groupe et H_1 , H_2 sont deux sous groupes de G.

Alors: 2$\in H_1 \cup H_2$ et 3$\in H_1 \cup H_2$ mais: 2+3=5$\notin H_1 \cup H_2 \Rightarrow H_1 \cup H_2$ n'est pas un sous groupe de G.

(3) On note $C=\{x\in G;\forall y\in G, x*y=y*x\}$ le centre de G. Montrer que C est un sous groupe de G.

a) Montrons que: $e\in C$?

$\forall y\in G$; $e*y=y*e=y\Rightarrow e\in C$

b) Montrons que: $\forall x_1,x_2\in C\Rightarrow x_1*x_2\in C$?

Soient $x_1,x_2\in C$ et $y\in G\Rightarrow (x_1*x_2)*y=x_1*(x_2*y)$ car $*$ est associative

$=x_1*(y*x_2)$ car $x_2\in C$

$=(x_1*y)*x_2$ car $*$ est associative

$=(y*x_1)*x_2$ car $x_2\in C$

$=y*(x_1*x_2)$ car $*$ est associative$\Rightarrow x_1*x_2\in C$

c) Montrons que: $\forall x\in C\Rightarrow x^{-1}\in C$?

utilisant le fait que: $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$ et $\left(a^{-1}\right)^{-1}=a$

$x^{-1}*y=\left(y^{-1}*x\right)^{-1}=\left(x*y^{-1}\right)^{-1}$ car $x\in C$

$=y*x^{-1}\Rightarrow x^{-1}\in C$

Conclusion: C est un sous groupe de G.

Exercice 06:

(1) Exprimer $\sin 2x$ et $\cos 2x$ en fonction de $\tan x$.

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= 2\sin x\cos x=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}\\
&= \frac{2\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= \cos^2 x-\sin^2 x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x+\sin^2 x}=\frac{\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}\\
&= \frac{1-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}
\end{aligned}$$

(2) calculer les réels x et y tels que $\arcsin x=2\arctan\frac{3}{4}$ et $\arccos y=2\arctan\frac{3}{4}$.

$$\arcsin x = 2\arctan\tfrac{3}{4} \Rightarrow \sin\arcsin x = \sin\left(2\arctan\tfrac{3}{4}\right) = \frac{2\tan\arctan\frac{3}{4}}{1+\tan^2\arctan\frac{3}{4}} = 2\frac{\frac{3}{4}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{24}{25}.$$
$$\arccos y = 2\arctan\tfrac{3}{4} \Rightarrow \cos\arccos y = \cos\left(2\arctan\tfrac{3}{4}\right) = \frac{1-\tan^2\arctan\frac{3}{4}}{1+\tan^2\arctan\frac{3}{4}} = \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}} = \frac{7}{25}$$

Exercice 07: Simplifier les expressions suivantes:

$$\sin(2\arcsin x), \cos(2\arcsin x), \cos(3\arctan x) \text{ et } \cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right)$$

$$1)\ \sin(2\arcsin x) = 2(\sin\arcsin x)(\cos\arcsin x)$$

mais:

$$(\cos\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2\arcsin x} = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$2)\quad \cos(2\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(2\arcsin x)} = \sqrt{1-4x^2(1-x^2)}$$

$$3)\quad \cos(3\arctan x) \text{ on a: } \cos 3u = 4\cos^3 u - 3\cos u \text{ (formule de Moivre)}$$

et

$$1+\tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u} \Rightarrow \cos u = \frac{\pm 1}{\sqrt{1+\tan^2 u}}$$

mais si on pose: $u = \arctan x$ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Donc $\cos u > 0$ d'où:

$$\begin{aligned}
\cos\arctan x &= \frac{+1}{\sqrt{1+\tan^2[\arctan x]}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\
&\Rightarrow \cos(3\arctan x) = 4\cos^3(\arctan x) - 3\cos(\arctan x\ ) \\
&= \frac{4}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} - 3\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

pour:

$$\begin{aligned}
\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right) \text{ on a } &: \quad \cos^2 z = \frac{1+\cos 2z}{2} \\
&\Rightarrow \quad \cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right) = \frac{1+\cos(\arctan x)}{2} \\
&= \quad \frac{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2} = \frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

Exercice 08:

(1) Vérifier que: Si $a+b \neq \frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$, alors $\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a \tan b}$

$$\begin{aligned} \tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\cos a \sin b + \sin a \cos b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b} \\ &= \frac{\frac{\cos a \sin b+\sin a \cos b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b-\sin a \sin b}{\cos a \cos b}} = \frac{\tan b + \tan a}{1-\tan a \tan b} \end{aligned}$$

(2) Montrer que: $2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\arctan x = \frac{\pi}{2}$.

Calculons: la dérivée de: $2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\arctan x$

$\left(2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\arctan x\right)' = 2\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)'}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2} = 2\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}{1+\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^2}+\frac{1}{1+x^2} = 2\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1}{1+1+x^2+x^2-2x\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{1+x^2}$

$= \frac{\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}+\frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+x^2} = 0 \Rightarrow 2\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\arctan x = \alpha$
avec$\alpha = cste$.(pour $x=0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 09: Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

En efftet: posons $y = \arctan x$, donc $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x = \tan y$

Il s'ensuit que

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\tan y}{\sqrt{1+\tan^2 y}} = \frac{\tan y}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 y}}} = |\cos y| \tan y = \cos y \tan y = \sin y = \sin(\arctan x)$$

Exercice 10: Montrer que si x et $y \in \mathbb{R}$ avec $xy \neq 1$:

$$\begin{aligned} \arctan x + \arctan y &= \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)+k\pi \\ \text{avec} \quad &: \quad k = \begin{cases} 0 \ \text{ si } xy<1 \\ 1 \ \text{ si } xy>1 \ , \ x>0 \text{ et } y>0 \\ -1 \text{ si } xy>1 \ , \ x<0 \text{ et } y<0 \end{cases} \end{aligned}$$

Il suffit de poser la fonction:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{1}{y} \right\} \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan x + \arctan y - \arctan \left(\dfrac{x+y}{1-xy} \right) \end{array}$$

après calcul:

$$f\,'(x) = 0 \text{ si } x \neq \frac{1}{y} \Rightarrow f \text{ est constante dans } \left]-\infty, \frac{1}{y}\right[\cup \left]\frac{1}{y}, +\infty\right[$$

1) Si $x < \frac{1}{y}$

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{x \to -\infty} f\ (x) & = & -\dfrac{\pi}{2} + \arctan y - \arctan \left(-\dfrac{1}{y} \right) \\ & = & -\dfrac{\pi}{2} + \arctan y - \arctan \left(\dfrac{1}{y} \right) = \left\{ \begin{array}{c} -\pi \ \text{ si } y < 0 \\ 0 \ \text{ si } y > 0 \end{array} \right. \end{array}$$

donc:

$$f\ (x) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \quad \text{si } xy < 1 \ \text{ et } y > 0 \\ -\pi \ \text{ si } xy > 1 \ \text{ et } y < 0 \end{array} \right. \quad \text{donc nécessairement } x < 0$$

1) Si $x > \frac{1}{y}$

$$\lim_{x \to +\infty} f\ (x) = \left\{ \begin{array}{c} \pi \ \text{ si } y < 0 \\ 0 \ \text{ si } y > 0 \end{array} \right.$$

donc:

$$f\ (x) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \quad \text{si } xy < 1 \ \text{ et } y < 0 \\ \pi \ \text{ si } xy > 1 \ \text{ et } y > 0 \end{array} \right. \quad \text{donc nécessairement } x > 0$$

Conclusion:

$$f\ (x) = \left\{ \begin{array}{c} -\pi \ \text{ si } xy > 1 \ \text{ et } y < 0 \ \text{ et } x < 0 \\ 0 \quad \text{si } xy < 1 \\ \pi \ \text{ si } xy > 1 \ \text{ et } y > 0 \text{ et } x > 0 \end{array} \right.$$

Partie VII

Espaces vectoriels:

5.8 Introduction:

Sur les vecteurs, au sens de la géométrie élémentaire, c'est-à-dire tels qu'on les rencontre en physique élémentaire, on a pu définir deux types d'opération : l'addition et la multiplication par un réel. Dans ce chapitre, nous allons généraliser ces notions en leur donnant une portée plus abstraite, donc plus vaste.

5.9 Définition d'un espace vectoriel:

On dit qu'un ensemble E est un **espace vectoriel** (ou possède une structure d'espace vectoriel) sur un corps commutatif $\Bbbk$ (le plus souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) si on peut définir sur les éléments de E (appelés **vecteur**) deux opérations, ou lois de composition:

5.9.1 L'addition: (notée +)

Cette opération interne fait de $(E,+)$ un groupe abélien.

5.9.2 Une opération externe, la multiplication par un élément de $\Bbbk$:

Cette loi externe (produit noté αu) possédant les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned}
\forall \alpha,\ \beta &\in \Bbbk,\ \forall u, v \in E : \\
\alpha\,(u+v) &= \alpha u + \alpha v \quad \text{(distributivité sur } E\text{)} \\
(\alpha+\beta)\,u &= \alpha u + \beta u \quad \text{(distributivité sur } \Bbbk\text{)} \\
\alpha\,(\beta u) &= (\alpha\beta)\,u \\
1.u &= u \quad \text{(1 étant l'élément unité de } \Bbbk\text{)}
\end{aligned}$$

5.10 Exemples:

Les ensembles suivants possèdent des structures d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ (éventuellement $\mathbb{C}$):

l'ensemble des polynômes à une variable, de degré inférieur ou égal à n;

l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle I;

l'ensemble des suites réelles ou complexes;

par contre l'ensemble des polynômes à une variable, de degré égal à $n \in \mathbb{N}^*$ n'est plus un espace vectoriel car le polynôme nul (l'élément neutre) n'est plus de degré n.

5.11 Propriétés immédiates des opérations dans un espace vectoriel:

Des axiomes de définition, il résulte:

1) $\forall u \in E$, $0.u = 0_E$.(0_E est l'élément neutre de E).

2) $\forall \alpha \in \mathbb{k}, \alpha.0_E = 0_E$.

3) $\forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall u \in E, \alpha.u = 0_E \Longrightarrow \alpha = 0$ ou $u = 0_E$.

4) $\forall u \in E, (-1)\, u = -u$.

5) $\forall\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{k}^2 \quad \forall u \in E - \{0_E\} \quad \alpha u = \beta u \Rightarrow \alpha = \beta$.

6) $\forall \alpha \in \mathbb{k}^* \quad \forall\, (u, v) \in E^2 \qquad \alpha u = \alpha v \Rightarrow u = v$.

5.12 Sous -espaces vectoriels:

On appelle **sous-espace vectoriel (**on note **s.e.v)**d'un espace vectoriel E, sur un corps $\mathbb{k}$, toute partie de E qui possède la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{k}$. Pour qu'une partie non vide F d'un espace vectoriel E soit un sous-espace de E, il faut et il suffit que toute combinaison de deux vecteurs de F soit un vecteur de F, c'est à dire:

$$\begin{aligned} 1) \quad F &\neq \varnothing \\ 2)\ \forall u, v &\in F, u + v \in F \\ 3)\forall \alpha &\in \mathbb{k}, \forall u \in F, \alpha u \in F \end{aligned}$$

5.12.1 Exemples:

1) l'ensemble des suites convergentes est un sous-espace de l'ensemble des suites réelles ou complexes.

2) $A = \{(x, y, z)\, ; x = y = z\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$.

3) $B = \{(x, y, 1)\}$ n'est pas un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ car $(x, y, 1) \in B$ mais $3(x, y, 1) = (3x, 3y, 3) \notin B$.

Proposition 87 *Si F est un s.e.v de E alors il contient l'élément neutre de E.*

Preuve: *F est un s.e.v de $E \Rightarrow F \neq \varnothing \Rightarrow \exists u \in F \Rightarrow$ si $\alpha = 0$ alors d'après* 3) $0_E \in F$. ■

Remarques:

0 est l'élément neutre de $\mathbb{R}$.

$(0, 0)$ est l'élément neutre de $\mathbb{R}^2$.

$(0, 0, 0)$ est l'élément neutre de $\mathbb{R}^3$.

Le polynôme nul est l'élément neutre de l'ensemble des polynômes.

La fonction nulle est l'élément neutre de l'ensemble des fonctions.

Donc d'après la proposition pour montrer que $F \neq \varnothing$ c'est pratique de voir l'élément neutre par exemple $(0, 0, 0) \notin B \Rightarrow B$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

5.13 Intersection et la réunion de deux sous-espaces:

-L'intersection de deux sous-espaces vectoriels (et donc d'un nombre fini) de E est un s.e.v de E.

En effet: soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E alors:

1) $0_E \in F$ et $0_E \in G \Rightarrow 0_E \in F \cap G \Rightarrow F \cap G \neq \varnothing$.

2) $\forall u, v \in F \cap G \Rightarrow u \in F, v \in F$ et $u \in G, v \in G \Rightarrow u + v \in F$ et $u + v \in G$ car F et G sont tous les deux des s.e.v de $E \Rightarrow u + v \in F \cap G$.

3) $\forall \alpha \in \mathbb{k}, \forall u \in F \cap G \Rightarrow u \in F$ et $u \in G \Rightarrow \alpha u \in F$ et $\alpha u \in G \Rightarrow \alpha u \in F \cap G$.

Conclusion: $F \cap G$ est un s.e.v de E.

-Par contre la réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est plus un s.e.v de E.En effet:

Exemple1: Soient $A = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\}$ deux s.e.v de $\mathbb{R}^2$car par exemple pour l'ensemble A on a:

1) $(0, 0) \in A \Rightarrow A \neq \varnothing$.

2) $\forall u, v \in A \Rightarrow u = (a, 0), v = (b, 0) \Rightarrow u + v = (a + b, 0) \in A$.

3) $\forall\alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in A \Rightarrow u = (a, 0) \Rightarrow \alpha u = (\alpha a, 0) \in A.$

Conclusion: A est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

de même pour l'ensemble B.

Alors $u = (1, 0) \in A \subset A \cup B$ et $v = (0, 2) \in B \subset A \cup B$ mais $u + v = (1, 2) \notin A \cup B \Rightarrow A \cup B$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$.

Exemple2: Soient $E = \{2k, k \in \mathbb{Z}\}$ et $F = \{3k, k \in \mathbb{Z}\}$ deux s.e.v de $\mathbb{Z}$ car par exemple pour l'ensemble E on a:

1) $0 \in E \Rightarrow E \neq \varnothing$.

2) $\forall u, v \in E \Rightarrow u = 2k, v = 2k' \Rightarrow u + v = 2(k + k') \in E$.

3) $\forall\alpha \in \mathbb{Z}, \forall u \in E \Rightarrow u = 2k \Rightarrow \alpha u = 2(\alpha K) \in E$.

Conclusion: E est un s.e.v de $\mathbb{Z}$.

de même pour l'ensemble F.

Alors $u = 2 \in E \subset E \cup F$ et $v = 3 \in F \subset E \cup F$ mais $u + v = 5 \notin E \cup F \Rightarrow$

$E \cup F$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{Z}$.

5.14 Somme de sous-espaces. Somme directe:

5.14.1 Somme de sous-espaces:

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors la somme de F et G est défine par:

$$F + G = \{u \in E \text{ tel que } u = u_1 + u_2 \text{ avec } u_1 \in F \text{ et } u_2 \in G\}$$

5.14.2 Somme directe:

On dit que la somme $F + G$ est **directe**, ou encore que F et G sont supplémentaires vis-à-vis de E, si la décomposition $u = u_1 + u_2$ d'un élément quelconque de E en somme de deux éléments de F et G est unique. Et on note:

$$E = F \oplus G$$

autrement on a:

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ \text{et} \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Exemple: Dans $\mathbb{R}^3$les deux s.e.v suivants:

$$F = \{(x, y, z)\,;x = y = z\} \text{ et } G = \{(x, y, 0)\,;x, y \in \mathbb{R}\}$$

sont supplémentaires. En effet:

$$\begin{aligned}
a) \text{ On a:} \quad \mathbb{R}^3 = & \quad F + G \text{ car} \\
1)\ F \quad & \subset \quad \mathbb{R}^3 \text{ et } G \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow F + G \subset \mathbb{R}^3. \\
2)\forall u \quad & \in \quad \mathbb{R}^3, u = (x, y, z) = (z, z, z) + (x - z, y - z, 0) \in F + G \Rightarrow \mathbb{R}^3 \subset F + G \\
b)\ 1) \text{ on } 0_E \quad & \in \quad F \text{ et } 0_E \in G \text{ car } F \text{ et } G \text{ sont deux s.e.v de } E \Rightarrow 0_E \in F \cap G \Rightarrow \{0_E\} \subset F \cap G. \\
2) \text{ si } u \quad & \in \quad F \cap G \Rightarrow u \in F \text{ et } u \in G \Rightarrow u = (x, x, x) \text{ et } u = (x, y, 0) \Rightarrow x = y \text{ et } x = 0 \\
& \Rightarrow \quad u = (0, 0, 0) \quad \Rightarrow F \cap G \subset \{0_E\}\,.
\end{aligned}$$

5.15 Famille de vecteurs d'un espace vectoriel:

5.15.1 1) Dépendance:

Une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$de vecteurs d'un $\Bbbk$-espace vectoriel $(E, +, .)$ est liée ou linéairement dépendants s'il existe $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \Bbbk$ non tous nuls tels que,

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = 0_E$.

Exemple:

Dans $E = \mathbb{R}_2 [x]$ (l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égale à 2 et à coefficients réels), les fonctions f_1, f_2, f_3

définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par:

$$f_1 (x) = x^2 + 1, f_2 (x) = x^2 - 1 \text{ et } \ f_3 (x) = x^2. \text{ sont liées.}$$

En effet: soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que:$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\lambda_3}{2}$ il y a donc une infinité de solutions $\left(-\frac{\lambda_3}{2}, -\frac{\lambda_3}{2}, \lambda_3\right)$ avec λ_3 réel arbitraire par exemple:$(1, 1, -2)$.

5.15.2 2) Indépendance:

Une famille $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$de vecteurs d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel $(E, +, .)$ est libre ou linéairement indépendants si pour tout $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k}$,

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0.$

Exemple:

Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $A = (0, 1, 3)\,, B = (2, 0, -1)$ et $C = (2, 0, 1)$ sont libres car:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\ \alpha A + \beta B + \gamma C = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ 3\alpha - \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

5.15.3 3) Famille génératrice ou systéme générateur:

Une famille de vecteurs $(a_1, a_2, ..., a_n)$ d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel $(E, +, .)$ est dite génératrice de E ou engendre E si tout élément u de E est combinaison linéaire de $(a_1, a_2, ..., a_n)$ c'est-à-dire:

$$\forall u \in E, \exists \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{k} \text{ tels que } u = \lambda_1.a_1 + \lambda_2.a_2 + ... + \lambda_n.a_n.$$

Exemple:

Dans $\mathbb{R}^2$ les deux vecteurs $u = (2, 3)$ et $v = (-1, 5)$ est une famille génératrice car:

$\forall w \in \mathbb{R}^2\ \exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tel que: $w = (x, y) = \lambda_1 u + \lambda_2 v = \lambda_1 (2, 3) + \lambda_2 (-1, 5) = (2\lambda_1 - \lambda_2, 3\lambda_1 + 5\lambda_2)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - \lambda_2 = x \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5x+y}{13} \\ \lambda_2 = \frac{-3x+2y}{13} \end{cases} \text{ donc } (\lambda_1, \lambda_2) \text{ existe pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

5.15.4 4) Base:

Une famille de vecteurs $(a_1, a_2, ..., a_n)$ d'un $\mathbb{k}$-espace vectoriel $(E, +, .)$ est une base de E si elle est à la fois libre et génératrice.

Exemple:

Dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (2, 3, 0)$, $v = (1, -1, 1)$ et $w = (-1, 3, 5)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

5.15.5 5) Dimension d'un espace vectoriel:

La dimension finie n d'un espace vectoriel E, est le nombre maximum de vecteurs que peut renfermer un système libre extrait de E, et on note $\dim E = n$, par convention on pose: $\dim(\{0_E\}) = 0$. Autrement dit la dimension d'un espace vectoriel E est le nombre de vecteurs qui forment la base de E. Si le nombre des éléments d'un système libre de E n'est pas majoré, on dit que E est de dimension infinie.

Remarque: si F est un s.e.v d'un espace vectoriel E de dimension n alors:

$$F \subset E \Rightarrow \dim F \leq \dim E$$

Exemple: $\dim \mathbb{R}^2 = 2$

5.15.6 6) Rang d'un système de vecteurs:

On appelle rang d'un système de p vecteurs $(u_1, u_2, ..., u_p)$ de E, avec $\dim E = n$, la dimension r du sous-espace vectoriel $(u_1, u_2, ..., u_p)$. En d'autres termes, r est le nombre maximum de vecteurs que peut comporter un système libre extrait du système donné.

5.15.7 7) Lien entre la dimension et la somme directe:

Dans les espaces de dimensions finies on a la formule:

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Dans le cas de la somme directe, $F \cap G = \{0_E\}$, donc:

$$\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$$

Enfin pour montrer que de sous espaces vectoriels de dimensions finies sont supplémentaires vis-à-vis de E, c'est à dire:

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} \dim E = \dim F + \dim G \\ \text{et} \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$$

Exemple: Dans $\mathbb{R}^3$les deux s.e.v suivants:

$$F = \{(x, y, z)\,;x = y = z\} \text{ et } G = \{(x, y, 0)\,;x, y \in \mathbb{R}\} \text{ sont supplémentaires.}$$

En effet:

$$\begin{aligned} \forall u &\in F, u = (x, x, x) = x(1,1,1) \Rightarrow (1,1,1) \text{ est une base de } F \Rightarrow \dim F = 1 \\ \forall v &\in F, v = (x, y, 0) = x(1,0,0) + y(0,1,0) \Rightarrow \{(1,0,0), (0,1,0)\} \text{ engendre } G \text{ et libre c} \\ \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) &= 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0 \Rightarrow \{(1,0,0), (0,1,0)\} \text{ est une base de } G \\ &\Rightarrow \dim G = 2 \Rightarrow \dim \mathbb{R}^3 = \dim F + \dim G = 3 \end{aligned}$$

Le reste de la preuve est déja fait.

5.16 Sous-espace engendré par un ensemble:

Définition 88 *Soit A une partie d'un espace vectoriel E. On définis le sous-espace vectoriel engendré par un ensemble A, le plus petit sous-espace vectoriel contenant l'ensemble A. Et on le note: $S(A)$.*

Exemples:

1) si A est un s.e.v de E alors: $S(A) = A$.

2) $S(\varnothing) = \{0_E\}$.

5.17 Exercice:

Exercice 01: Les sous-ensembles suivants sont-ils des s-ev de $\mathbb{R}^2$?

$$1)\ A = \left\{\left(x, x^2\right); x \in \mathbb{R}\right\} 1) \qquad 2)\ B = \{(x, ax+b); x \in \mathbb{R}\},\ a \text{ et } b \text{ sont des paramètres réels.}$$

$$3)\ C = \left\{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Exercice 02: Soit:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec: } x^2 + 2y^2 + z^2 + 2y\ \ (x+z) = 0\right\}$$

E ainsi défini est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui donner sa dimension.

Exercice 03: Soient:

$$E_1 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a = c\right\} \text{ et } E_2 = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3; a + b + c = 0\right\} \quad \text{et } E_3 = \{(0, 0, c); c \in \mathbb{R}\}.$$

(1) Montrer que: $E_i, i = 1, 2, 3$ sont des s.ev de $\mathbb{R}^3$.

(2) Montrer que:$\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$, $\mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.

(3) Dans quel cas la somme est directe.

Exercice 04: Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3 /\ a, b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{et } E_2 = \left\{(c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3 /\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

avec E_2 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

(3) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

(4) Montrer que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

(5) Déduire si la somme est directe ou non.

5.18 Le corrigé:

Exercice 01: Les sous-ensembles suivants sont-ils des s-ev de $\mathbb{R}^2$?

$$1)\ A = \left\{\left(x, x^2\right); x \in \mathbb{R}\right\} \qquad 2)\ B = \{(x, ax+b); x \in \mathbb{R}\},\ a \text{ et } b \text{ sont des paramètres réels.}$$
$$3)\ C = \left\{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

1) $A = \left\{\left(x, x^2\right); x \in \mathbb{R}\right\}$ n'est pas un sous espace vectoriel car $(2,4), (3,9) \in A$ mais $(2,4) + (3,9) = (5,13) \notin A$.

2) $B = \{(x, ax+b); x \in \mathbb{R}\}$

1er cas: Si $b \neq 0$ on a $(0,0) \notin B$ alors B n'est pas un sous espace vectoriel car chaque s.e.v contient l'élément neutre de l'espace.

2ème cas: Si $b = 0$

$B = \{(x, ax); x \in \mathbb{R}\}$

a) $(0,0) \in B \Rightarrow B \neq \varnothing$

b) Si $v_1, v_2 \in B \Rightarrow v_1 = (x_1, ax_1)$ et $v_2 = (x_2, ax_2) \Rightarrow v_1 + v_2 = (x_1 + x_2, a(x_1 + x_2)) \in B$

c) Si $v_1 \in B, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha v_1 = (\alpha x_1, a(\alpha x_1)) \in B$

Alors B est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

3) $C = \left\{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ n'est pas un s.e.v de $\mathbb{R}^2$

Car: $(1,0) \in C$ mais $4 \cdot (1,0) = (4,0) \notin C$.

Exercice 02: Soit:

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec: } x^2 + 2y^2 + z^2 + 2y\ (x+z) = 0\right\}$$

E ainsi défini est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui donner sa dimension.

$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2y\ (x+z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2yx + z^2 + y^2 + 2yz = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + (y+z)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -y$ et $z = -y$

$\Rightarrow E = \left\{(-y, y, -y) \in \mathbb{R}^3 \text{ avec: } y \in \mathbb{R}\right\}$

1) a) $(0,0,0)\in E \Rightarrow E\neq\varnothing$

b) Si $v_1,v_2\in E \Rightarrow v_1=(-y_1,y_1,-y_1)$ et $v_2=(-y_2,y_2,-y_2)\Rightarrow v_1+v_2=(-(y_1+y_2),(y_1+y_2),-(y_1+y_2))$ E

c) Si $v\in E,\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow \alpha v=(-(\alpha y),(\alpha y),-(\alpha y))\in E$

Alors E est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

2) Si $v\in E$ alors $v=(-y,y,-y)=y(-1,1,-1)$ ce qui implique que le vecteur $(-1,1,-1)$ engendre E.

Puisque on a qu'un seul vecteur alors $B=\{(-1,1,-1)\}$ est une base de $E\Rightarrow \dim E=1$.

Exercice 03: Soient:

$$E_1=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3; a=c\right\} \text{ et } E_2=\left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3; a+b+c=0\right\} \quad \text{et } E_3=\{(0,0,c)\,; c\in\mathbb{R}\}.$$

(1) Montrer que: $E_i, i=1,2,3$ sont des s.ev de $\mathbb{R}^3$.

Pour E_1 par exemple:

a) $(0,0,0)\in E_1 \Rightarrow E_1\neq\varnothing$

b) Si $v_1,v_2\in E_1\Rightarrow v_1=(x_1,y_1,x_1)$ et $v_2=(x_2,y_2,x_2)\Rightarrow v_1+v_2=(x_1+x_2,(y_1+y_2),x_1+x_2)\in$ E_1

c) Si $v\in E_1,\alpha\in\mathbb{R}\Rightarrow \alpha v=(\alpha x,\alpha y,\alpha x)\in E_1$

Alors E_1 est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

De même pour les deux dernier cas.

(2) Montrer que: $\mathbb{R}^3=E_1+E_2$, $\mathbb{R}^3=E_2+E_3$ et $\mathbb{R}^3=E_1+E_3$.

a) Montrons que: $\mathbb{R}^3=E_1+E_2$?

On a: $E_1\subset\mathbb{R}^3$ et $E_2\subset\mathbb{R}^3\Rightarrow E_1+E_2\subset\mathbb{R}^3$

Si $v\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow v=(x,y,z)=(\alpha,\beta,\alpha)+(\delta,\theta,-\delta-\theta)=(\alpha+\delta,\beta+\theta,\alpha-\delta-\theta)\Rightarrow$

$$\begin{cases} x=\alpha+\delta \\ y=\beta+\theta \\ z=\alpha-\delta-\theta \end{cases}$$

Il suffit de prendre par exemple: $\beta = 0 \Rightarrow \theta = y \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \delta \\ z = \alpha - \delta - y \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(x+y+z) \Rightarrow$ $\delta = \frac{1}{2}(x-y-z)$

D'où $v = (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}(x+y+z), 0, \frac{1}{2}(x+y+z)\right) + \left(\frac{1}{2}(x-y-z), y, -\frac{1}{2}(x-y-z) - y\right) \in E_1 + E_2$

b) Montrons que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$?

On a: $E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_3 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1 + E_3 \subset \mathbb{R}^3$

Si $v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v = (x, y, z) = (x, y, x) + (0, 0, z - x) \in E_1 + E_3$.

c) Montrons que: $\mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$?

On a: $E_3 \subset \mathbb{R}^3$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_2 + E_3 \subset \mathbb{R}^3$

Si $v \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow v = (x, y, z) = (x, y, -x - y) + (0, 0, z + x + y) \in E_2 + E_3$.

D'où $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$, $\mathbb{R}^3 = E_2 + E_3$ et $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_3$.

(3) Dans quel cas la somme est directe.

A) Il suffit de vérifier si on a $E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}$?

a) $(0, 0, 0) \in E_1 \cap E_2$.

b) Si $v \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow v \in E_1$ et $v \in E_1 \Rightarrow v = (a, b, a)$ et $v = (a, b, -a - b) \Rightarrow a = -a - b \Rightarrow$ $b = -2a$

Donc par exemple $(1, -2, 1) \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow E_1 \cap E_2 \neq \{(0, 0, 0)\}$

ce qui implique que la somme n'est pas directe.

B) Il suffit de vérifier si on a $E_2 \cap E_3 = \{(0, 0, 0)\}$?

a) $(0, 0, 0) \in E_2 \cap E_3$.

b) Si $v \in E_2 \cap E_3 \Rightarrow v \in E_2$ et $v \in E_3 \Rightarrow v = (a, b, -a - b)$ et $v = (0, 0, c) \Rightarrow a = b = c =$ $0 \Rightarrow v = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}$

ce qui implique que la somme est directe.

C) Il suffit de vérifier si on a $E_1 \cap E_3 = \{(0, 0, 0)\}$?

a) $(0, 0, 0) \in E_1 \cap E_3$.

b) Si $v \in E_1 \cap E_3 \Rightarrow v \in E_2$ et $v \in E_3 \Rightarrow v = (a, b, a)$ et $v = (0, 0, c) \Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow$ $v = (0, 0, 0)$

$\Rightarrow E_1 \cap E_3 = \{(0,0,0)\}$

ce qui implique que la somme est directe.

Exercice 04: Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3 / \ a, b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{ et } E_2 = \left\{(c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3 / \ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

(1)(Montrons que E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$?.

a) $E_1 \neq \emptyset$?

$(0,0,0) \in E_1 \Rightarrow E_1 \neq \emptyset$

b) $\forall \ \ u_1, u_2 \in E_1 \Rightarrow u_1 + u_2 \in E_1$?

Soient $u_1, u_2 \in E_1 \Rightarrow u_1 = (a_1 + b_1, b_1 - 3a_1, a_1)$ et $u_2 = (a_2 + b_2, b_2 - 3a_2, a_2)$

$\Rightarrow u_1 + u_2 = ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), (b_1 + b_2) - 3(a_1 + a_2), (a_1 + a_2)) \in E_1$

c) $\forall \ \ u \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in E_1$?

Soient $u \in E_1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow u = (a+b, b-3a, a)$

$\Rightarrow \alpha u = (\alpha a + \alpha b, \alpha b - 3\alpha a, \alpha a) \in E_1$

Conclusion: E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminons une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

a)

$$u \in E_1 \Rightarrow u = (a+b, b-3a, a) = a \ \ (1,-3,1) + b \ \ (1,1,0)$$

alors $B_1 = \{(1,-3,1), (1,1,0) \ \}$ engendre E_1. mais:

$$\alpha (1,-3,1) + \beta (1,1,0) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

alors les deux vecteurs de B_1 sont linéairement indépendants.

Ce qui implique que $B_1 = \{ \ (1,-3,1), (1,1,0)\}$ est une base de E_1.

b)

$$u \in E_2 \Rightarrow u = (c, -2c, c) = c \ \ (1, -2, 1)$$

alors $B_2 = \{\ (1, -2, 1)\}$ engendre E_2. mais:

$$\alpha\,(1, -2, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = 0$$

Ce qui implique que $B_2 = \{\ (1, -2, 1)\}$ est une base de E_2.

(3) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

$$\dim E_1 = 2 \quad \text{et} \quad \dim E_2 = 1.$$

(4) Montrer que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

a)" $\supset$" $\quad E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $\quad E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$.

b) "$\subset$" soit $u \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow u = (x, y, z) = (a + b, b - 3a, a) + (c, -2c, c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a + b + c \\ y = b - 3a - 2c \\ z = a + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = x - z \\ y = x - z - a - 2z \Rightarrow a = -y + x - 3z \\ c = z - a = z - (-y + x - 3z) = -x + y + 4z \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = (x, y, z) = (2x - y - 4z, -2x + 3y - 8z, -y + x - 3z) +$$

$$(-x + y + 4z, -2\,(-x + y + 4z)\,, -x + y + 4z)$$

$$\in E_1 + E_2 \text{ d'où: } \ \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2.$$

(5) On déduire que: $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

(a)

$$\begin{aligned} \dim E_1 &= 2 \quad \text{et} \quad \dim E_2 = 1 \\ &\Rightarrow \dim E_1 + \dim E_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \\ \text{ou bien on a} &: \ \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2.. \end{aligned}$$

(b) :

$$
\begin{aligned}
E_1 \cap E_2 \quad &= \quad \{(0,0,0)\} \text{ car: } \{(0,0,0)\} \subset E_1 \cap E_2 \\
&\quad\ \text{car } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont deux sous espaces vectoriels.} \\
\text{De plus si:} \quad & \quad u \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow u = (a+b, b-3a, a) \text{ et } u = (c, -2c, c) \\
&\Rightarrow \begin{cases} a+b=c \\ b-3a=-2c \\ a=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=0 \\ c=0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\} \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} \dim E_1 + \dim E_2 = \dim \mathbb{R}^3 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\} \end{cases} \\
&\quad\ \text{la somme est directe } \left(\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2\right).
\end{aligned}
$$

Partie VIII

Méthodes d'intégration:

Si $F(x)$ est une fonction dont la dérivée $F'(x) = f(x)$ sur un certain intervalle de l'axe des x, alors $F(x)$ est appelée **primitive** ou **intégrale indéfinie** de $f(x)$. L'intégrale indéfinie d'une fonction donnée n'est pas unique; par exemple, x^2, $x^2 + 4$ et $x^2 + 7$ sont toutes des intégrales indéfinies de

$f(x) = 2x$, car elles sont décrites par la formule $F(x) = x^2 + C$, où C est une constante arbitraire, appelée constante d'intégration.

Le symbole $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ désigne lintégrale indéfinie de $f(x)$. Ainsi, $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$.

5.19 Formules fondamentales d'intégration:

Un certain nombre des formules ci-dessous découlent immédiatement des formules courantes de dérivation, donc on a les propriétés et les formules suivantes:

$$\begin{aligned}
1. \int \frac{d}{dx}\left[f\ \ (x)\right]\ \mathrm{d}x &= f\ \ (x)+C\ ,\ C\in\mathbb{R}. \\
2. \int \left[f\ \ (x)+g\ \ (x)\right]\ \mathrm{d}x &= \int \left[f\ \ (x)\right]\ dx+\int \left[g\ \ (x)\right]\ dx. \\
3. \int \alpha\left[f\ \ (x)\right]\ \mathrm{d}x &= \alpha\int \left[f\ \ (x)\right]\ dx,\ \ \alpha\in\mathbb{R}. \\
4. \int x^{m}\ \mathrm{d}x &= \frac{x^{m+1}}{m+1},\ \ m\neq 1. \\
5. \int \frac{\mathrm{d}x}{x} &= \ln|x|+C. \\
6. \int e^{x}dx &= e^{x}+C. \\
7. \int a^{x}\mathrm{d}x &= \int e^{x\ln a}dx\ \ =\frac{a^{x}}{\ln a}+C,\quad a>0,a\neq 1. \\
8. \int \sin x\ \mathrm{d}x &= -\cos x+C. \\
9. \int \cos x\ \mathrm{d}x &= \sin x+C. \\
10. \int \tan x dx &= \ln|\sec x|+C.avec \sec x=\frac{1}{\cos x} et \cos ecx=\frac{1}{\sin x} \\
11. \int \cot an\ x\ \mathrm{d}x &= \ln|\sin x|+C. \\
12. \int \frac{1}{\cos^{2}x}\mathrm{d}x &= \tan x+C. \\
13. \int \frac{1}{\sin^{2}x}\mathrm{d}x &= -\cot an\ x+C. \\
14. \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}} &= \arcsin\frac{x}{a}\ +C. \\
15. \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^{2}-a^{2}}} &= \frac{1}{a}\ \mathrm{arcsec}\frac{x}{a}\ +C.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
16. \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} &= \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C.\\
17. \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C.\\
18. \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.
\end{aligned}
$$

5.19.1 Formule de changement de variable:

Pour calculer une primitive $\int f\ (x)\ \mathrm{d}x$, il est souvent utile de remplacer la variable x par une nouvelle variable u, et ce en écrivant x comme fonction $g\,(u)$, ce qui nous ramènes à trouver une formule fondamentale. Par substitution, nous avons $x = g\,(u)$ et $\mathrm{d}x = g'\,(u)\ \mathrm{d}u$. L'équation:

$$\int f\,(x)\ \mathrm{d}x = \int f\,(g\,(u))\,g'\,(u)\ \mathrm{d}u.$$

s'applique et s'appelle la formule de changement de variable.

Exemple 5.1 *Pour calculer l'intégrale* $\int (x+3)^{11}\ dx$*, remplaçons* $x+3$ *par* u*. Ce qui donne* $x = u-3 \Rightarrow dx = du \Rightarrow$

$$\int (x+3)^{11}\,dx = \int (u)^{11}\,dx = \frac{1}{12}u^{12} + C = \frac{1}{12}(x+3)^{12} + C.$$

5.19.2 Formule de réduction:

Deux formules simples nous permettent de calculer plus rapidement les primitives.

La première est donnée par:

$$\int f\,'(x)\,[f\ \ (x)]^m\ \mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}[f\ \ (x)]^{m+1} + C \qquad m \neq -1$$

Exemple 5.2

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int \frac{1}{x}(\ln x)^2\,dx = \frac{1}{3}(\ln x)^3 + C$$

La seconde est:

$$\int \frac{f\,'(x)}{f\ \ (x)}\ dx = \ln|f\ \ (x)| + C$$

Exemple 5.3

$$\int \cot an\ x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + C.$$

5.20 Intégration par parties:

Remarque 5.1 *On utilise l'intégration par parties dans le cas où la fonction à intégrer est une fonction élémentaire ou produit des fonctions élémentaires suivantes:*

Fonctions trigonométriques, Polynômes,

Fonctions inverses des fonctions trigonométriques, $\ln(f\ (x))\,, e^{\ f\ (x)}, ...$

Ou bien dans les formules de réduction qui introduits pour chaque intégrale une nouvelle intégrale, de même forme que l'intégrale initiale, mais ayant un exposant réduit ou augmenté.

Exemple 5.4

$$\begin{aligned} 1. \int \left(x^2 - a^2\right)^m dx &= \frac{x\left(x^2-a^2\right)^m}{2m+1} - \frac{2ma^2}{2m+1}\int \left(x^2-a^2\right)^{m-1} dx, \quad m \neq -\frac{1}{2} \\ 2. \int \cos^m x \sin^n x\ dx &= -\frac{\cos^{m-1} x \sin^{n-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x\ dx, \quad m \neq -n \end{aligned}$$

5.20.1 Intégration par parties:

Si u et v sont des fonctions dérivables de x,

$$\begin{aligned} d(uv) &= u\ \mathrm{d}v + v\ \mathrm{d}u \\ &\Rightarrow udv = d(uv) - v\ \mathrm{d}u \\ &\Rightarrow \int u\ \mathrm{d}v = uv - \int v\ \mathrm{d}u \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} \int f\ (x)\ g'\ (x)\ \mathrm{d}x &= f\ (x)\ g\ (x) - \int f\ '(x)\ g\ (x)\ \mathrm{d}x \\ \text{avec} &: f\ (x) = u \text{ et } g'\ (x)\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}v \\ &\Rightarrow \mathrm{d}u = f\ '(x)\ \mathrm{d}x \text{ et } v = g\ (x) \end{aligned}$$

C'est la formule de l'intégration par parties. Deux règles générales se dégagent:

1. La partie prise comme dv doit être aisément intégrable.
2. $\int v \text{ d}u$ ne doit pas être plus complexe que $\int u \text{ d}v$.

Exemple 5.5 *Calculer:*

$$I = \int \ln\left(x^2+2\right) \ dx$$

Par parties on pose:

$$\begin{aligned}
f\ \ (x) &= \ln\left(x^2+1\right) \ \ et\ g'\ \ (x) = 1 \\
&\Rightarrow \ f\ \ '(x) = \frac{2x}{x^2+2} et\ g\ \ (x) = x \\
I &= \int f\ \ (x)\ \ g'\ \ (x)\ \ dx = f\ \ (x)\ \ g\ \ (x) - \int f\ '(x)\ \ g\ \ (x)\ \ dx \\
&= x\ \ \ln\left(x^2+1\right) - \int \frac{2x^2}{x^2+2}\ \ dx \\
&= x\ \ \ln\left(x^2+1\right) - \int \left(2 - \frac{4}{x^2+2}\right)\ \ dx \\
&= x\ \ \ln\left(x^2+1\right) - \int 2\ \ dx + 2\int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\ \ dx \\
&= x\ \ \ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C
\end{aligned}$$

5.21 Intégrales trigonométriques:

5.21.1 Les identités trigonométriques:

Dans ce chapitre, pour calculer les intégrales trigonométriques, on utilise les identités suivantes:

$$\begin{aligned}
1.\quad \sin^2 x + \cos^2 x &= 1, \qquad 2.\ 1+\tan^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}\\
3.\ \ 1+\cot an^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x}, \qquad 4.\ \ \sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right)\\
5.\quad \cos^2 x &= \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right), \qquad 6.\ \ \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x\\
& 7.\ \ \sin x\cos y = \frac{1}{2}\left[\sin\left(x-y\right)+\sin\left(x+y\right)\right]\\
8.\,\sin x\sin y &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(x-y\right)+\cos\left(x+y\right)\right]\\
& 9.\ \ \cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos\left(x-y\right)+\cos\left(x+y\right)\right]\\
10.\ 1-\cos x &= 2\sin^2\frac{1}{2}x\\
& 11.\ 1+\cos x = 2\cos^2\frac{1}{2}x,\\
12.\ \ 1\pm\sin x &= 1\pm\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)
\end{aligned}$$

Par la suite on applique les deux règles:

$$\begin{aligned}
1.\ \text{Pour} \int \cos^m x\sin^n x \ \mathrm{d}x \quad &: \quad \text{si } m \text{ est impair, on pose } u=\cos x. \text{ Si } n \text{ est impair, on pose } u=\sin x.\\
2.\ \text{Pour} \int \tan^m x\sec^n x \ \mathrm{d}x \quad &: \quad \text{si } n \text{ est pair, on pose } u=\tan x. \text{ Si } m \text{ est impair, on pose } u=\sec x.\\
\text{avec } \sec x \quad &= \quad \frac{1}{\sin x}.
\end{aligned}$$

Exemple 5.6 (A)

1^{er} *cas: les intégrales de types:* $\int \sin^n x\ dx$ *ou* $\int \cos^n x\ dx$ *avec* n *est un entier pair.*

Dans ce cas on utilise la forme linéaire de $\sin^2 x$ *ou* $\cos^2 x$ *c'est- à- dire: les deux formules 4 et 5, pour obtenir des formules fondamentales.*

Exemple 5.7 (1)

$$\int \sin^2 x \ dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \ dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Exemple 5.8 (2)

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x \ dx &= \int \left(\cos^2 x\right)^2 \ dx = \int \left[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right]^{2} dx \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right) \ dx \\
&= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x \ dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \ dx \\
&= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \ dx
\end{aligned}$$

mais dans $\int \cos^2 2x \ dx$ *on pose* : $t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \ \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int \cos^2 2x \ dx = \frac{1}{2}\int \cos^2 t \ dt \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\, dt \\
&= \frac{1}{4}\int dt + \frac{1}{4}\int \cos 2t\, dt \\
&= \frac{t}{4} + \frac{1}{6}\sin 2t + C_1 \\
&= \frac{2x}{4} + \frac{1}{6}\sin 4x + C_1 \\
&\Rightarrow \int \cos^4 x \ dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{2x}{4} + \frac{1}{6}\sin 4x + C_1\right) + C_2 \\
&= \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{8} + \frac{1}{24}\sin 4x + C \\
&= \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{24}\sin 4x + C
\end{aligned}$$

Exemple 5.9 (B)

$2^{\text{ème}}$ *cas: les intégrales de types:* $\int \sin^n x \ dx$ *ou* $\int \cos^n x \ dx$ *avec* n *est un entier impair.*

Alors dans les deux cas on pose: $n = n - 1 + 1$ *ensuite on utilise la 1ère formule c'est à dire:*

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \text{ \textit{pour l'indice} } n-1 \text{ \textit{qui est une puissance paire, ce qui permet de donner}} \\ & \quad \text{\textit{une intégrale de type formule de réduction.}} \end{aligned}$$

$$\int f'(x) \left[f(x) \right]^m \, dx.$$

Exemple 5.10 (1)

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \sin x \, dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right) \sin x \, dx = \int \sin x \, dx + \int \cos^2 x \left(-\sin x\right) \, dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C. \end{aligned}$$

Exemple 5.11 (2)

$$\begin{aligned} \int \sin^5 x \, dx &= \int \sin^4 x \sin x \, dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^2 \sin x \, dx \\ &= \int \sin x \, dx - \int \cos^4 x \left(-\sin x\right) \, dx + 2 \int \cos^2 x \left(-\sin x\right) \, dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{3} \cos^3 x + C. \end{aligned}$$

Exemple 5.12 (C)

$3^{ème}$ *cas: les intégrales de types:* $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \, dx$ *avec*

l'un des deux indices (n, m) *est un entier impair.*

C'est pratiquement la même chose comme l'exemple(B), on applique la même méthode pour l'indice impair, mais si les deux

sont impairs alors le meilleurs choix est le plus petit.

Exemple 5.13 (1)

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \ \cdot \cos^4 x \ dx &= \int \sin^2 x \ \cdot \cos^4 x \ \sin x \ dx = \int \left(1-\cos^2 x\right) \cdot \cos^4 x \ \sin x \ dx \\
&= -\int \cos^4 x \ \left(-\sin x \ \right) dx + \int \cos^6 x \ \left(-\sin x \ \right) dx \\
&= -\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C.
\end{aligned}$$

Exemple 5.14 (2)

$$\begin{aligned}
\int \sin^5 x \ \cdot \cos^7 x \ dx &= \int \left(\sin^2 x\right)^2 \ \cdot \cos^7 x \ \sin x \ dx = \int \left(1-\cos^2 x\right)^2 \cdot \cos^7 x \ \sin x \ dx \\
&= -\int \cos^7 x \ \left(-\sin x \ \right) dx - \int \cos^{11} x \ \left(-\sin x \ \right) dx + 2\int \cos^9 x \ \left(-\sin x \ \right) dx \\
&= -\frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{12}\cos^{12} x + \frac{2}{10}\cos^{10} x + C.
\end{aligned}$$

Exemple 5.15 (D)

$4^{\text{ème}}$ *cas: les intégrales de types:* $\int \sin^n x \ \cdot \cos^m x \ dx$ *avec*

les deux indices (n, m) *sont des entiers pairs.*

On applique la forrmule suivante: $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$ *et la forme linéaire de* $\cos$*inus ou sinus.*

Exemple 5.16 (1)

$$\int \sin^4 x \ \cdot \cos^4 x \ dx = \frac{1}{16}\int (\sin 2x)^4 \ dx = \frac{1}{32}\int \sin^4 t \ dx$$

qui est de type (A).

Exemple 5.17 (2)

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 3x \cdot \cos^2 3x \ dx &= \int \left(\sin^2 3x \cdot \cos^2 3x\right) \sin^2 3x \ dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \left(1 - \cos 6x\right) \ dx \\
&= \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \ dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \cos 6x \ dx \\
&= \frac{1}{16} \int \left(1 - \cos 12x\right) \ dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 6x \cos 6x \ dx \\
&= \frac{1}{16} x - \frac{1}{192} \sin 12x - \frac{1}{144} \sin^3 x + C.
\end{aligned}$$

Remarque 89 *On applique les mêmes méthodes dans le cas des intégrales qui contients les fonctions:* $\tan x, \cot anx, \sec x, \cos ecx$.

Exemple 5.18

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x \ dx &= \int \tan^3 x \ \tan^2 x dx = \int \tan^3 x \ \left(\sec^2 x - 1\right) dx \\
&= \int \tan^3 x \ \sec^2 x dx - \int \tan^3 x \ dx \\
&= \int \tan^3 x \ \sec^2 x dx - \int \tan x \ \left(\sec^2 x - 1\right) dx \\
&= \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln \left|\sec x\right| + C.
\end{aligned}$$

5.22 Subtitutions trigonométriques:

Quelques intégrales contient l'un des facteurs suivants:

$$\sqrt{a^2 - b^2x^2}, \sqrt{a^2 + b^2x^2} \text{ ou } \sqrt{b^2x^2 - a^2}$$

mais aucun autre facteur irrationnel, dont on peut la remplacer par une nouvelle intégrale qui est trigonométrique après un chagement de variable.

1. Si la fonction à intégrer contient un facteur $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, on pose $x = \frac{a}{b} \sin z$ et on obtient: $a\sqrt{1 - \sin^2 z} = a \cos z$.

2. Si la fonction à intégrer contient un facteur $\sqrt{a^2 + b^2x^2}$, on pose $x = \frac{a}{b} \tan z$ et on obtient: $a\sqrt{1 + \tan^2 z} = a \sec z$.

3. Si la fonction à intégrer contient un facteur $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$, on pose $x = \frac{a}{b} \sec z$ et on obtient:

$a\sqrt{\sec^2 z - 1} = a\tan z.$

Exemple 5.19 (1)

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}}$$

on pose:$x = 2\tan z \Rightarrow dx = 2\sec^2 z \; dz, \; \sqrt{4+x^2} = 2\sec z$ *d'où:*

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{2\sec^2 z \; dz}{(4\tan^2 z)(2\sec z)} = \frac{1}{4}\int \frac{\sec z}{\tan^2 z} \; dz = \frac{1}{4}\int \sin^{-2} z \cos z \; dz \\ &= -\frac{1}{4\sin z} + C = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C. \end{aligned}$$

Exemple 5.20 (2)

$$I_2 = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} \; dx$$

on pose:$x = 2\sec z \Rightarrow dx = 2\sec z \tan z \; dz, \; \sqrt{x^2-4} = 2\tan z$ *d'où:*

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{4\sec^2 z\,(2\sec z\tan z) \; dz}{2\tan z} = 4\int \sec^3 z \; dz \\ &= 2\sec z\tan z + 2\ln|2\sec z + \tan z| + C \\ &= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + 2\ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + C. \end{aligned}$$

Exemple 5.21 (3)

$$I_3 = \int \frac{\sqrt{9-4x^2}}{x} \; dx$$

on pose:$x = \frac{3}{2}\sin z \Rightarrow dx = \frac{3}{2}\cos z \; dz, \; \sqrt{9-4x^2} = 3\cos z$ *d'où:*

$$\begin{aligned} I_3 &= 3\int \frac{\cos^2 z \; dz}{\sin z} = 3\int \frac{1-\sin^2 z}{\sin z} dz \\ &= 3\int \cos ec \; z - 3\int \sin z \; dz \\ &= 3\ln|\cos ec z - \cot an \; z| + 3\cos z + C. \\ &= 3\ln\left|\frac{3-\sqrt{9-4x^2}}{x}\right| + \sqrt{9-4x^2} + C \end{aligned}$$

5.23 Intégration par fractions partielles:

Théoriquement tout polynômes à coefficients réels peut s'exprimer comme produit de facteurs linéaires réels de la forme $ax + b$ et d'autre quadratiques de la forme $ax^2 + bx + c$.

Un polynôme quadratique $\left(ax^2 + bx + c\right)$ est réductible ssi $\triangle = b^2 - ac \geq 0$ et il est irréductible ssi $\triangle < 0$ (Dans ce cas les racines ne sont pas réelles).

5.23.1 Fraction rationnelle:

Une fraction rationnelle est une fonction $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, où $f(x)$ et $g(x)$ sont des polynômes. Si le degré $f(x)$ est inférieur au degré de $g(x)$, on dit que $H(x)$ est une fraction rationnelle propre, autrement, on dit que $H(x)$ est impropre. Dans ce cas on peut exprimer $H(x)$ comme la somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle propre par la méthode de la division euclidienne. Alors pour intégrer une fraction rationnelle $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ on suit les étapes suivantes:

La division euclidienne:

Il faut ramener l'intégrale à une intégrale d'une fraction propre si non on utilise la division euclidienne si la fraction est impropre ce qui donne deux intégrales la $1^{ère}$ est polynômiale et l'autre est une intégrale d'une fraction propre.

Intégration des fractions rationnelles propres:

Si $H(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ avec le degré $f(x)$ est inférieur au degré de $g(x)$.

$1^{ère}$ étape: La décomposition du dénominateur:

On décompose le dénominateur comme produit des facteurs qui sont parmis les types suivants:

1- Facteurs linéaires distincts:

Un facteur linéaire est de la forme: $ax + b$.

2- Facteurs linéaires répétés:

Un facteur linéaire répété qui est de la forme: $(ax + b)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

3-Facteurs quadratiques distincts:

C'est un facteur de la forme $ax^2 + bx + c$ en plus il est irréductible.

4- Facteurs quadratiques répétés:

C'est un facteur de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)^n$ avec $n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 2$ de plus ax^2+bx+c est irréductible.

$2^{ème}$ étape: La décomposition en éléments simples:

C'est l'écriture d'une fraction rationnelle propre comme somme d'éléments simples qui sont en général de la forme:

$$\frac{A_1}{a_1x+b_1},\frac{B_1}{(c_1x+d_1)^n},\frac{\alpha_1x+\beta_1}{a_2x^2+b_2x+c_2},\text{ et }\frac{\alpha_2x+\beta_2}{(a_3x^2+b_3x+c_3)^m}.$$

d'une façon que les dénominateurs des éléments simples sont tous les cas possibles tel que sont dénominateur commun est $g\ (x)$.

Exemple 5.22

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x+1)(x-1)^2(x^2+x+1)(x^2+x+3)^2} &= \frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{(x-1)^2}\\ &+\frac{ax+b}{x^2+x+1}+\frac{cx+d}{x^2+x+3}+\frac{ex+f}{(x^2+x+3)^2}\end{aligned}$$

Remarque 5.2 *Le nombre d'éléments simples est la somme des puissances des facteurs qui forment le dénominateur. De plus il faut calculer les constantes* $(A_1,,A_2,A_3,a,b,c,d,e\ \textit{et}\ f)$ *par la méthode du dénominateur commun et l'identification avec le numérateur du fraction rationnelle.*

$3^{ème}$ étape: Le calcul de l'intégrale de chaque élément simple:

On a quatre types d'intégrales:

1-

$$\int\frac{A_1}{a_1x+b_1}\ \mathrm{d}x=\frac{A_1}{a_1}\ln(a_1x+b_1)+C,C\in\mathbb{R}$$

2-

$$\int\frac{B_1}{(c_1x+d_1)^n}\ \mathrm{d}x=\frac{B_1}{c_1(-n+1)}(c_1x+d_1)^{-n+1}+C,C\in\mathbb{R}$$

3-

$$\int\frac{\alpha_1x+\beta_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\ \mathrm{d}x=\alpha\ln\left(a_2x^2+b_2x+c_2\right)+\beta\ \arctan(\mu x+\theta)+C,C\alpha,\beta,\mu,\theta\in\mathbb{R}$$

Exemple 5.23 *Calculer l'intégrale:*

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{4x+3}{2x^2+x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{4x+3}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,dx \\
&= \frac{4}{2}\int \frac{x+\frac{3}{4}}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,dx = \int \frac{2x+\frac{3}{2}}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,dx \\
&= \int \frac{2x+\frac{1}{2}+1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,dx \\
&= \int \frac{2x+\frac{1}{2}}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,dx + \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,dx \\
&= \ln\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right) + \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,dx
\end{aligned}$$

pour l'intégrale:

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}\,dx = \int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}+-\frac{1}{16}+\frac{3}{2}}\,dx \\
&= \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}\,dx = \frac{16}{23}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{16}}\,dx \\
&= \frac{16}{23}\int \frac{1}{\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right)^2+1}\,dx \\
\text{on pose} &: \; y = \frac{4x+1}{\sqrt{23}} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{23}}{4}dx \\
&\Rightarrow \; J = \frac{4}{\sqrt{23}}\int \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{4}{\sqrt{23}}\arctan y + C_1, C_1 \in \mathbb{R} \\
&= \frac{4}{\sqrt{23}}\arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right) + C_1, C_1 \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \; I = \ln\left(x^2+\frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right) + \frac{4}{\sqrt{23}}\arctan\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right) + C, C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

4-

$$\int \frac{\alpha_2 x+\beta_2}{(a_3x^2+b_3x+c_3)^m}\mathrm{d}x = \frac{1}{m+1}\left(a_3x^2+b_3x+c_3\right)^{-m+1} + \int \frac{\lambda}{(a_3x^2+b_3x+c_3)^m}\mathrm{d}x \text{ avec } m \neq 1 \text{ .}$$

pour l'intégrale:

$$\int \frac{\lambda}{(a_3x^2+b_3x+c_3)^m}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \delta\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^m} \text{ avec } m \neq 1 \text{ (Les substitutions trigonométriques).}$$

5.24 Divers changements de variable:

Si la fonction à intégrer contient des radicaux de la forme:

1- $\sqrt[n]{ax+b}$, alors le changement de variable consiste à poser $ax+b=z^n$ pour obtenir une fraction rationnelle.

2- $\sqrt{x^2+ax+b}$ avec un $\triangle<0$, alors le changement de variable consiste à poser $x^2+ax+b=(z-x)^2$ pour obtenir une fraction rationnelle.

3- $\sqrt{(a+x)(b-x)}$, alors le changement de variable consiste à poser$(a+x)(b-x)=(a+x)^2 z^2$ ou $(a+x)(b-x)=(b-x)^2 z^2$ pour obtenir une fraction rationnelle.

4- Si la fonction à intégrer contient des facteurs cosinus ou sinus dans le numérateur ou bien dans le dénominateur, alors on pose:

$$\begin{aligned} x &= 2\arctan z \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}z}{1+z^2} \\ \text{avec} &: \sin x=\frac{2z}{1+z^2} \text{ et } \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}. \end{aligned}$$

Remarque 5.3 *On peut trouver des changements de variables qui sont suggérés par la forme de la fonction à intégrer.*

Exemple 5.24 (1)

$$\begin{aligned} I &= \int x^5\sqrt{1-x^3}dx \\ \textit{on pose} &: 1-x^3=z^2 \Rightarrow 3x^2dx=-2z\ dz \\ I &= \int x^3\sqrt{1-x^3}x^2\ dx=\int\left(1-z^2\right)z\left(-\frac{2}{3}z\ dz\right) \\ &= -\frac{2}{3}\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}\right)+C=-\frac{2}{45}\left(1-x^3\right)^{\frac{3}{2}}\left(2+3x^3\right)+C. \end{aligned}$$

Exemple 5.25 (2) *Dans l'intégrale:*

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x^4} dx \ , \text{ on pose: } x = \frac{1}{z} \\ \text{on trouve} &: \ J = -\int z\sqrt{z-1}\ dz \\ \text{ensuite on pose} &: \ z-1=t^2. \\ J &= -2\left[\frac{(1-x)^{\frac{5}{2}}}{5x^{\frac{5}{2}}} + \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{3x^{\frac{3}{2}}}\right] + C. \end{aligned}$$

Pour les premiers changements de variables on propose les exemples suivants:

Exemple 5.26 (1)

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$$

On pose: $x+2=z^2 \Rightarrow dx = 2z\ dz$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{2z\ dz}{z(z^2-4)} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-2}{z+2}\right| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+2}+2}\right| + C \end{aligned}$$

Exemple 5.27 (2)

$$I_2 = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+2}}$$

alors on pose:

$$\begin{aligned} x^2+x+2 &= (z-x)^2 \Rightarrow x = \frac{z^2-2}{1+2z} \\ &\Rightarrow dx = \frac{2\left(z^2+z+2\right)}{(1+2z)^2} dz \ \text{ et } \sqrt{x^2+x+2} = \frac{z^2+z+2}{1+2z} \\ &\Rightarrow I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{z-\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+x+2}+x+\sqrt{2}}\right| + C \end{aligned}$$

Exemple 5.28 (3)

$$I_3 = \int \frac{x\,dx}{(5-4x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On pose:

$$\left(5-4x-x^2\right) = (5+x)(1-x) = (1-x)^2 z^2$$

Alors:

$$x = \frac{z^2 - 5}{1 + z^2} \quad , \; dx = \frac{12z \;\, dz}{(1 + z^2)^2} \;\; et \; \sqrt{5 - 4x - x^2} = (1 - x)\, z = \frac{6z}{1 + z^2}$$

D'où:

$$I_3 = \frac{1}{18}\left(z + \frac{5}{z}\right) + C = \frac{5 - 2x}{9\sqrt{5 - 4x - x^2}} + C$$

Exemple 5.29 (4)

$$I_4 = \int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$$

On pose:

$$\begin{aligned} x &= 2 \arctan z \Rightarrow dx = \frac{2dz}{1 + z^2} \\ avec \quad &: \quad \sin x = \frac{2z}{1 + z^2} \;\; et \;\; \cos x = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}. \\ &\Rightarrow \; I_4 = \int \frac{dz}{z\,(1 + z)} = \ln\left|\frac{z}{1 + z}\right| + C \\ &= \; \ln\left|\frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}}\right| + C \end{aligned}$$

5.25 Intégration des fonctions hyperboliques:

On a:

$$\begin{aligned} ch\ x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } sh\ x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ avec &: \; ch^2 x - sh^2 x = 1 \end{aligned}$$

D'où les formules d'intégration qui découlent directement des formules de dérivation.

$$\begin{aligned}
1. \int sh\ x\ \mathrm{d}x &= ch\ x + C \quad 2. \int ch\ x\ \mathrm{d}x = sh\ x + C \\
3. \int th\ x\ \mathrm{d}x &= \ln ch\ x + C \quad 4. \int \coth\ x\ \mathrm{d}x = \ln |sh\ x| + C \\
5. \int \mathrm{sech}^2\ x\ \mathrm{d}x &= th\ x + C \quad 6. \int \mathrm{cosech}^2\ x\ \mathrm{d}x = -\coth\ x + C \\
7. \int \mathrm{sech}\ x\ th\ x\ \mathrm{d}x &= -\sec h\ x + C \quad 8. \int \mathrm{cosech}\ x\ \coth\ \mathrm{x}\ \mathrm{d}x = sh\ x + C \\
9. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}\ \mathrm{d}x &= sh^{-1}\ \frac{x}{a} + C \quad 10. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\ \mathrm{d}x = ch^{-1}\ \frac{x}{a} + C\ ,\ x > a > 0 \\
11. \int \frac{1}{a^2 - x^2}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{a} th^{-1}\ \frac{x}{a} + C\ ,\ x^2 < a^2 \quad 12. \int \frac{1}{x^2 - a^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\coth^{-1}\ \frac{x}{a} + C\ ,\ x^2 > a^2
\end{aligned}$$

Remarque 5.4 *On peut utiliser les deux formules exponentielles pour calculer les intégrales qui contient $ch\ x$ et $sh\ x$.*

5.26 Exercice:

Exercice 01: Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$$\begin{array}{l}
1. \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\ dx \qquad 2. \int e^{3\cos 2x} \sin 2x\ dx \qquad 3. \int \frac{x+2}{\sqrt{4x - x^2}}\ dx \\
4. \int \arcsin x\ dx \qquad (\text{supp})5. \int x^2 \sin x\ \mathrm{dx} \qquad (\text{supp})6. \int x^3 e^{2x}\ \mathrm{dx} \\
7. \int \sin^5 x\ dx \quad 8. \int \cos^4 x\ dx \quad 9. \int \sin^7 x\ \cos^4 x\ dx \quad 10. \int \sin^2 x\ \cos^4 x\ dx \\
11. \int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 5} dx \qquad 12. \int \frac{2x - 1}{(x-1)^2 (x^2+1)} dx \qquad 13. \int \frac{2x^3 + x + 1}{x^2 - x - 2} dx \\
14. \int \frac{1}{1 + \sin x - \cos x} dx \qquad 15. \int \frac{1}{5 + 4\sin x} dx
\end{array}$$

Exercice 02:

(1) Calculer les intégrales définies suivantes:

$$I = .\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\ dx \qquad \text{et} \qquad J = .\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\ dx$$

(2) Soit

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\ dx\ .$$

Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}.

Exercice 03: Soit:

$$I = .\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x + \cos x}\ \mathrm{dx} \text{ et } J = .\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}\ \mathrm{dx}$$

(1) Sans calculer$I$ et J, montrer que $I = J$.

(2) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

(3) En déduire que $I + J = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

(4) Calculer $I + J$. En déduire I et J.

Exercice 04: Soit $f\ (x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$

(1) Vérifier que $\forall x < 1, f\ '(x) = \sqrt{1-x}$.

(2) Soit $I_n = .\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\ \mathrm{dx}$.

a) Calculer I_0.

b) Déterminer une relation entre I_n et I_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$

c) En déduire I_n en fonction de n.

Exercice 05:(supp)

(1) Calculer l'intégrale indéfinie suivante:

$$A = \int \cos^2 x\ \sin^4 x\ dx$$

(2) Soient les intégrales définies:

$$I = \int_0^\pi x^2 \cos^2 x dx \quad , J = \int_0^\pi x^2 \sin^2 x dx$$

Calculer: $I + J$ et $I - J$ (sans calcul de I et J). En déduire I et J.

(3) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.

(a) Montrer, en utilisant un changement de variable, que:

$$\int_0^\pi x\ f\ (\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f\ (\sin x)\,\mathrm{d}x$$

(b) En déduire la valeur de:

$$I = \int_0^\pi \frac{x\ \sin x}{1+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x$$

5.27 Le corrigé des exercices:

1. 1)$I_1 = \int e^x (e^x+1)^4\,dx$ on pose: $y = e^x + 1$

   $\Rightarrow \mathrm{d}y = e^x \mathrm{d}x \Rightarrow I_1 = \int y^4\ \mathrm{d}y = \frac{1}{5}y^5 + c = \frac{1}{5}(e^x+1)^5 + c.$

   2) $I_2 = \int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$ on pose: $y = \sqrt{x} \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x \Rightarrow I_2 = 2\int \left(1+y^2\right)^2 \mathrm{d}y =$ $2\int \left(1+2y^2+y^4\right)\mathrm{d}y = 2y + \frac{4}{3}y^3 + \frac{2}{5}y^5 + c$

   $= 2\sqrt{x} + \frac{4}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\sqrt{x}\right)^5 + c.$

   3) $I_3 = \int \frac{x+3}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = \frac{-1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2} + 3\arcsin x + c.$

   4) $I_4 = \int (1+\tan x)^2\ \mathrm{d}x = \int \left(1+\tan^2 x\right)\ \mathrm{d}x$

   $+2\int \tan x \mathrm{d}x = \tan x - 2\int \frac{-\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = \tan x - 2\ln|\cos x| + c.$

   5) $I_5 = \int \arctan x\ \mathrm{d}x$, par parties on pose: $f\ (x) = \arctan x$ et $g'(x) = 1$

   d'où: $f\ '(x) = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ et $g(x) = x \Rightarrow I_5 = f\ (x)\, g(x) - \int f\ '(x)\, g(x)\ \ \mathrm{d}x$

   $= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right).$

   6) $I_6 = \int x^2 \sin x\ \mathrm{d}x$, par parties on pose: $f\ (x) = x^2$ et $g'(x) = \sin x$

d'où: $f'(x) = 2x\mathrm{d}x$ et $g(x) = -\cos x \Rightarrow I_6 = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\ \mathrm{d}x$

$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\mathrm{d}x$, calculons la $2^{ème}$intégrale par parties:

on pose: $h(x) = x$ et $k'(x) = \cos x \Rightarrow h'(x) = \mathrm{d}x$ et $k(x) = \sin x$

$\Rightarrow \int x\cos x\mathrm{d}x = h(x)\,k(x) - \int h'(x)\,k(x)\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I_6 = -x^2\cos x + 2(x\sin x + \cos x) + c.$

7) $I_7 = \int \cos 4x\ e^{2x}\mathrm{d}x$ on pose: $y = 2x \Rightarrow \mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x \Rightarrow I_7 = \frac{1}{2}\int \cos 2y\ e^y\mathrm{d}y$

par parties on pose: $f(y) = \cos 2y$ et $g'(y) = e^y \Rightarrow f'(y) = -2\sin 2y\mathrm{d}y$ et $g(y) = e^y$

$\Rightarrow I_7 = \frac{1}{2}\left[f(y)\,g(y) - \int f'(y)\,g(y)\ \mathrm{d}y\right] = \frac{1}{2}\left[e^y\cos 2y + 2\int e^y\sin 2y\mathrm{d}y\right]$

calculons la $2^{ème}$intégrale par parties:

On pose: $h(y) = \sin 2y$ et $k'(y) = e^y \Rightarrow h'(y) = 2\cos 2y\ \mathrm{d}y$ et $k(y) = e^y$

$\Rightarrow \int e^y\sin 2y\mathrm{d}y = h(y)\,k(y) - \int h'(y)\,k(y)\mathrm{d}y = e^y\sin 2y\ -2\int e^y\cos 2y\ \mathrm{d}y$

$= e^y\sin 2y\ -4\ I_7 \Rightarrow I_7 = \frac{1}{2}\left[e^y\cos 2y + 2(e^y\sin 2y - 4I_7)\right]$

$\Rightarrow I_7 = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}(e^y\cos 2y) + (e^y\sin 2y)\right].$

8) $I_8 = \int \cos^5 x\ \mathrm{d}x = \int \cos^4 x\ \cos x\mathrm{d}x = \int \left(\cos^2 x\right)^2\cos x\mathrm{d}x = \int \left(1-\sin^2 x\right)^2\ \cos x\mathrm{d}x$

$= \int \left(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x\right)\ \cos x\mathrm{d}x = \int \cos x\mathrm{d}x - 2\int \sin^2 x\cos x\mathrm{d}x + \int \sin^4 x\cos x\mathrm{d}x$

$= \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + c.$

9) $I_9 = \int \sin^4 x\ \mathrm{d}x = \int \left(\sin^2 x\right)^2\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\mathrm{d}x = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x\mathrm{d}x$

On pose dans $\int \cos^2 2x\mathrm{d}x$, $y = 2x \Rightarrow \mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x \Rightarrow \int \cos^2 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos^2 y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2y)\right)\mathrm{d}y$

$= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}y + \frac{1}{4}\int \cos 2y\mathrm{d}y = \frac{y}{4} + \frac{1}{8}\sin 2y + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x + c$

$\Rightarrow I_9 = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + c = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c.$

10) $I_{10} = \int \sin^9 x\ \cos^4 x\mathrm{d}x = \int \sin^8 x\ \cos^4 x\sin x\mathrm{d}x = \int \left(1-\cos^2 x\right)^4\ \cos^4 x\sin x\mathrm{d}x$

$= \int \left(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x\right)^2\cos^4 x\sin x\mathrm{d}x = \int \left(\left(1-2\cos^2 x\right)^2 + 2\left(1-2\cos^2 x\right)\cos^4 x + \cos^8 x\right)$
$\cos^4 x\sin x\mathrm{d}x$

$= \int \left(1 - 4\cos^2 x + 4\cos^4 x + 2\cos^4 x - 4\cos^6 x + \cos^8 x\right)\ \cos^4 x\sin x\mathrm{d}x$

$=\int \cos^4 x \sin x\mathrm{d}x - 4\int \cos^6 x \sin x\mathrm{d}x + 6\int \cos^8 x \sin x\mathrm{d}x - 4\int \cos^{10} x \sin x\mathrm{d}x + \int \cos^{12} x \sin x\mathrm{d}x$

$=-\frac{1}{5}\cos^5 x + \frac{4}{7}\cos^7 x - \frac{6}{9}\cos^9 x + \frac{4}{11}\cos^5 x - \frac{1}{13}\cos^{13} x + c.$

11) $I_{11} = \int \cos^2 x \sin^4 x \ \mathrm{d}x = \int \cos^2 x \sin^2 x \ \sin^2 x\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\mathrm{d}x - \frac{1}{16}\int \sin^2 2x\,(2\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\mathrm{d}x - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{3}\sin^3 2x$

0n pose dans: $\int \sin^2 2x\mathrm{d}x$, $y = 2x \Rightarrow \mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x \Rightarrow \int \sin^2 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin^2 y\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2y)\right)\mathrm{d}y$

$=\frac{1}{4}\int \mathrm{d}y - \frac{1}{4}\int \cos 2y\mathrm{d}y = \frac{y}{4} - \frac{1}{8}\sin 2y + c = \frac{x}{2} - \frac{1}{8}\sin 4x + c$

$\Rightarrow I_{11} = \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + c.$

12) $I_{12} = \int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \ \mathrm{d}x$, alors on pose: $\frac{x}{2} = \tan y \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{\cos^2 y}\mathrm{d}y$

$\Rightarrow \ I_{12} \ = \ \int \frac{1}{4\tan^2 y\sqrt{1+\tan^2 y}} \ \frac{2}{\cos^2 y}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \frac{1}{4\frac{\sin^2 Y}{\cos^2 y}\sqrt{1+\tan^2 y}} \ \frac{2}{\cos^2 y}\mathrm{d}y \ = \ \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin^2 y\frac{1}{\cos y}} \ \mathrm{d}y \ =$
$\frac{1}{2}\int \sin^{-2} y \cos y \ \mathrm{d}y$

$=-\frac{1}{2}\sin^{-1} x + c.$

13) $I_{13} = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}} \ \mathrm{d}x$, alors on pose: $\frac{x}{2} = \frac{1}{\cos y} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2\sin y}{\cos^2 y}\mathrm{d}y$

$\Rightarrow I_{13} = \frac{1}{2}\int \frac{\frac{4}{\cos^2 y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\cos y}\right)^2-1}}\frac{2\sin y}{\cos^2 y}\mathrm{d}y = 4\int \frac{\frac{1}{\cos^4 y}}{\tan y}\sin y\mathrm{d}y = 4\int \cos^{-3} \ y\mathrm{d}y$

Calculons cette intégrales par parties: $f \ (y) = \frac{1}{\cos y}$ et $g'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} \Rightarrow f\,'(y) = \frac{\sin y}{\cos^2 y}\mathrm{d}y$
et $g(y) = \tan y$

$\Rightarrow I_{13} = 4\int \cos^{-3} \ y\mathrm{d}y = 4\left[f(y)\,g(y) - \int f'(y)\,g(y) \ \ \mathrm{d}y\right] = 4\left[\frac{1}{\cos y}\tan y - \int \frac{\sin^2 y}{\cos^3 y}dy\right]$

$= 4\left[\frac{1}{\cos y}\tan y - \int \frac{\left(1-\cos^2 y\right)}{\cos^3 y}dy\right] = 4\left[\frac{1}{\cos y}\tan y - \int \frac{\left(1-\cos^2 y\right)}{\cos^3 y}dy\right]$

$= 4\left[\frac{1}{\cos y}\tan y - \frac{1}{4}I_{13} + \int \frac{1}{\cos y}dy\right] \Rightarrow 2I_{13} = 4\left[\frac{1}{\cos y}\tan y + \int \frac{1}{\cos y}dy\right]$

Calculons: $\int \frac{1}{\cos y}\mathrm{d}y$ on pose: $y = 2\arctan z \Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{2}{1+z^2}\mathrm{d}z$ et $\cos y = \frac{1-z^2}{1+z^2} \Rightarrow \int \frac{1}{\cos y}\mathrm{d}y$
$=\int \frac{1+z^2}{1-z^2}\cdot\frac{2}{1+z^2}\mathrm{d}z$

$=2\int \frac{1}{1-z^2}\mathrm{d}z = \int \frac{1}{1-z}\mathrm{d}z + \int \frac{1}{1+z}\mathrm{d}z = -\ln(1-z) + \ln(1+z) + c = -\ln\left(1-\tan\frac{y}{2}\right) +$
$\ln\left(1+\tan\frac{y}{2}\right) + c$

$\Rightarrow 2I_{13} = 4\left[\frac{1}{\cos y}\tan y + -\ln\left(1-\tan\frac{y}{2}\right) + \ln\left(1+\tan\frac{y}{2}\right) + c\right]$

$\Rightarrow I_{13} = x\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1} + -2\ln\left(1-\tan\frac{\arctan\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}}{2}\right) + 2\ln\left(1+\tan\frac{\arctan\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}}{2}\right) + c$

ou bien dans:$\int \frac{1}{\cos y}\mathrm{d}y = \int \frac{\frac{1+\sin y}{\cos^2 y}}{\frac{1+\sin y}{\cos y}}\mathrm{d}y = \ln\left|\frac{1+\sin y}{\cos y}\right| + c \Rightarrow 2I_{13} = 4\left[\frac{1}{\cos y}\tan y + \ln\left|\frac{1+\sin y}{\cos y}\right| + c\right]$

$\Rightarrow I_{13} = x\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1} + \ln\left|\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}\right| + c.$

Remarque: On peut trouver par la première méthode $I_{13} = x\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1} + \ln\left|\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}\right| + c.$

En effet: $2I_{13} = 4\left[\frac{1}{\cos y}\tan y + -\ln(1-z) + \ln(1+z) + c\right]$

$\Rightarrow I_{13} = 2\left[\frac{1}{\cos y}\tan y + \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right) + c\right] = 2\left[\frac{1}{\cos y}\tan y + \ln\left(\frac{1+2z+z^2}{1-z^2}\right) + c\right]$

$=2\left[\frac{1}{\cos y}\tan y + \ln\left(\frac{1+z^2}{1-z^2} + \frac{2z}{1-z^2}\right) + c\right]$ mais: $\tan y = \frac{2z}{1-z^2}$ et $\frac{1}{\cos y} = \frac{1+z^2}{1-z^2}$

$\Rightarrow I_{13} = x\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1} + \ln\left|\frac{x}{2} + \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}\right| + c.$

14) $I_{14} = \int \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,\mathrm{d}x$ on pose: $x - 1 = \sin y \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos y\mathrm{d}y$ et $\sqrt{1-(x-1)^2} = \cos y$

$\Rightarrow I_{14} = \int \frac{(\sin y+1)^2}{\cos y}\cos y\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}y + 2\int \sin y\,\mathrm{d}y + \frac{1}{2}\int(1-\cos 2y)\mathrm{d}y = \frac{3}{2}y - 2\cos y - \frac{1}{4}\sin 2y + c$

$=\frac{3}{2}\arcsin(x-1) - 2\sqrt{2x-x^2} - \frac{1}{2}\sin y\cos y + c$

$=\frac{3}{2}\arcsin(x-1) - 2\sqrt{2x-x^2} - \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{2x-x^2} + c.$

15) $I_{15} = \int \frac{x+1}{2x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x+4}{2x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x-2+6}{2x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x-2}{2x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x + \frac{6}{4}\int \frac{1}{2x^2-2x+5}\,\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{4}\ln\left|2x^2-2x+5\right| + \frac{6}{8}\int \frac{1}{x^2-x+\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x$, de plus:$x^2 - x + \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \triangle < 0$

$\Rightarrow x^2-x+\frac{5}{2} = x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{5}{2} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4} \Rightarrow I_{15} = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2-2x+5\right| + \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}\,\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{4}\ln\left|2x^2-2x+5\right| + \frac{3}{4\cdot\frac{9}{4}}\int \frac{1}{\frac{4}{9}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2-2x+5\right| + \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x$, on pose: $y = \frac{2x-1}{3}$

$\Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{2}{3}\mathrm{d}x \Rightarrow I_{15} = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2-2x+5\right| + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\ln\left|2x^2-2x+5\right| + \frac{1}{2}\arctan y + c$

$=\frac{1}{4}\ln\left|2x^2-2x+5\right| + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2x-1}{3}\right) + c.$

16) $I_{16} = \int \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

La décomposition en éléments simples $\Rightarrow \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{ex+f}{x^2+1}$

$\Rightarrow \frac{2x-1}{x^2(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{(x-1)^2} + \frac{ex+f}{x^2+1}$

$= \frac{ax(x-1)^2\left(x^2+1\right)+b(x-1)^2\left(x^2+1\right)+cx^2(x-1)\left(x^2+1\right)+dx^2\left(x^2+1\right)+(ex+f)\ x^2(x-1)^2}{x^2(x-1)^2(x^2+1)}$

Par identification si on pose: $x=0 \Rightarrow b=-1$, $x=1 \Rightarrow 2d=1$ et si $x=i \Rightarrow -2e=-1$ et $2f=2$

pour $x=2 \Rightarrow 3 = 10a-5+20c+10+8 \Rightarrow a+2c=-1$

pour $x=-1 \Rightarrow -3 = -8a-8-4c+1+2 \Rightarrow -4a-2c=1 \Rightarrow a=0$ et $c=\frac{-1}{2}$

$\Rightarrow I_{16} = -\int \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\ \mathrm{d}x + \int \frac{\frac{1}{2}x+1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x$

$\Rightarrow I_{16} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}\int \frac{2x}{x^2+1}\ \mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2+1}\ \mathrm{d}x$

$\Rightarrow I_{16} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \arctan x + c.$

17) $I_{17} = \int \frac{2x^3+x+1}{x^2-x-2}\ \mathrm{d}x \Rightarrow \frac{2x^3+x+1}{x^2-x-2} = 2x+2+\frac{7x+5}{x^2-x-2}$

$\Rightarrow I_{17} = \int \left(2x+2+\frac{7x+5}{x^2-x-2}\right)\mathrm{d}x = x^2+2x+\frac{7}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x-2}\mathrm{d}x + \frac{17}{2}\int \frac{1}{x^2-x-2}\mathrm{d}x$

$=x^2+2x+\frac{7}{2}\ln\left|x^2-x-2\right| + \frac{17}{2}\int \frac{1}{(x-2)(x+1)}\mathrm{d}x$

$=x^2+2x+\frac{7}{2}\ln\left|x^2-x-2\right| + \frac{17}{2}\int \frac{\frac{1}{3}}{(x-2)}\mathrm{d}x + \frac{17}{2}\int \frac{-\frac{1}{3}}{(x+1)}\mathrm{d}x$

$=x^2+2x+\frac{7}{2}\ln\left|x^2-x-2\right| + \frac{17}{6}\ln|x-2| - \frac{17}{6}\ln|x+1| + c.$

18) $I_{18} = \int \frac{1}{5+4\cos x}\ \mathrm{d}x$,on pose: $x = 2\arctan z \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+z^2}\mathrm{d}z$ et $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$

$\Rightarrow I_{18} = \int \frac{1}{5+4\frac{1-z^2}{1+z^2}}\ \frac{2}{1+z^2}\mathrm{d}z = \int \frac{2}{9+z^2}\ \mathrm{d}z = \frac{2}{9}\int \frac{1}{1+\left(\frac{z}{3}\right)^2}\ \mathrm{d}z$ on pose: $y=\frac{z}{3}$

$\Rightarrow \mathrm{d}y = \frac{1}{3}\mathrm{d}z \Rightarrow I_{17} = \frac{2}{3}\int \frac{1}{1+y^2}\ \mathrm{d}y = \frac{2}{3}\arctan y + c$

$=\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{z}{3}\right) + c = \frac{2}{3}\arctan\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{3}\right) + c.$

19) Le même changement de variable que l'intégrale 18) avec: $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$

$\Rightarrow I_{19} = \int \frac{1}{1+\sin x-\cos x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}=\frac{1-z^2}{1+z^2}}\mathrm{d}z = \int \frac{2}{1+z^2+2z=(1-z^2)}\mathrm{d}z = \int \frac{2}{2z^2+2z}\mathrm{d}z$

$=\int \frac{1}{z(z+1)}\mathrm{d}z = \int \frac{\alpha}{z}\mathrm{d}z + \int \frac{\beta}{z+1}\mathrm{d}z = \int \frac{1}{z}\mathrm{d}z - \int \frac{1}{z+1}\mathrm{d}z = \ln|z| - \ln|z+1| + c.$

20) $\mathrm{I} = \int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$ on peut appliquer la méthode 18)

$2^{ème}$méthode: on pose $J = \int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I+J = x$ et $J-I = \ln|\sin x+\cos x| \Rightarrow I = \frac{1}{2}\left(x-\ln|\sin x+\cos x|\right)+c.$

Exercice 02:supp 1) $I_1=\int_{-1}^{1}\frac{\arctan x}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$ si on pose: $y=\arctan x\Rightarrow \mathrm{d}y=\frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x$ et si: $x=-1\Rightarrow y=-\frac{\pi}{4}$,

$x=1\Rightarrow y=\frac{\pi}{4}\Rightarrow I_1=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}y\ \ \mathrm{d}y=\frac{1}{2}y^2\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=0$

Remarque: On a une symétrie dans l'intégrale I_1 et puisque $I_1=0$ alors la fonction est impaire

$\Rightarrow \arctan(-x)=-\arctan x.$

4) $I_4=\int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{\sqrt{3+x^2}}\ \mathrm{d}x$ puisque la fonction à intégrer est impaire$\Rightarrow I_4=0.$

2) $I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^5 x}{\cos x}\ \mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2\sin x}{\cos x}\ \mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right)\sin x}{\cos x}\ \mathrm{d}x$

$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{(-\sin x)}{\cos x}\ \mathrm{d}x+2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,(-\sin x)\ \mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\cos^3 x\,(-\sin x)\ \mathrm{d}x$

$=-\ln(\cos x)+\cos^2 x-\frac{1}{4}\cos^4 x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=-\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}\cos^4\frac{\pi}{3}-$

$\left(-\ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\cos^4\frac{\pi}{4}\right)=-\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}-\left(-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\right).$

3) $I_3=\int_0^1\frac{1}{3+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\mathrm{d}x$ on pose: $y=\frac{x}{\sqrt{3}}\Rightarrow \mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x$

avec: $x=0\Rightarrow y=0$ et $x=1\Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow I_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{1}{1+y^2}\ \mathrm{d}y$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan y|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Exercice 03: On a:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x \text{ et } J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

1) $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x=\sin x+\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}}=1-1=0\Rightarrow I=J$

2) Vérifions que: $\forall x\in\mathbb{R},\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

En effet: $\forall x\in\mathbb{R},\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\cos x\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\cos x+\sin x.$

3) En déduire que: $I+J=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$

$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$ d'après 2)

$\Rightarrow I+J=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$ on pose: $y=x-\frac{\pi}{4}\Rightarrow \mathrm{d}y=\mathrm{d}x\Rightarrow I+J=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos y}\mathrm{d}y$

$=\frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos y}\mathrm{d}y$ car la fonction est paire

$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x$

4) $I+J=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x$ on pose: $x=2\arctan z\Rightarrow\mathrm{d}x=\frac{2}{1+z^2}\mathrm{d}z$ et $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$

et quand: $x=0 \Rightarrow z=0$ et si $x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow z=\tan\frac{\pi}{8}$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{1+z^2}{1-z^2}\cdot\frac{2}{1+z^2}\mathrm{d}z = 2\int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{1}{1-z^2}\mathrm{d}z = \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{1}{1-z}\mathrm{d}z + \int_0^{\tan\frac{\pi}{8}} \frac{1}{1+z}\mathrm{d}z$

$= -\ln(1-z)+\ln(1+z)\big|_0^{\tan\frac{\pi}{8}} = \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\Big|_0^{\tan\frac{\pi}{8}} = \ln\left(\frac{1+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{8}}\right)$

Alors: $\begin{cases} I-J=0 \\ I+J=\sqrt{2}\ln\left(\frac{1+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{8}}\right) \end{cases} \Rightarrow I=J=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{1+\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan\frac{\pi}{8}}\right).$

Exercice 04: Soit $f(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$

1) $\forall x<1, f(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x} = -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot(-1)(1-x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-x}$.

2) Soit $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\ \mathrm{d}x$

a) $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\ \mathrm{d}x = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\big|_0^1 = \frac{2}{3}$

D'autre part par parties dans I_n on pose: $k(x)=x^n$ et $h'(x)=\sqrt{1-x}$

$\Rightarrow k'(x) = nx^{n-1}$ et $h(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$

$\Rightarrow I_n = k(x)\cdot h(x)\big|_0^1 - \int_0^1 k'(x)\cdot h(x)\ \mathrm{d}x$

$\Rightarrow I_n = -\,nx^{n-1}\cdot\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\big|_0^1 + \frac{2}{3}n\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\cdot\ \mathrm{d}x$

$=\frac{2}{3}n\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}\cdot\ \mathrm{d}x - \frac{2}{3}n\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\cdot\ \mathrm{d}x = \frac{2}{3}n\left(I_{n-1}-I_n\right)$

$\Rightarrow \left(1+\frac{2}{3}n\right) I_n = \frac{2}{3}nI_{n-1}$.

b) On a: $\left(1+\frac{2}{3}\right) I_1 = \frac{2}{3}I_0$

$\left(1+\frac{2}{3}2\right) I_2 = \frac{2}{3}2I_1$

$\left(1+\frac{2}{3}3\right) I_3 = \frac{2}{3}3I_2$

.

.

.

$\left(1+\frac{2}{3}(n-1)\right) I_{n-1} = \frac{2}{3}(n-1)I_{n-2}$

et $\left(1+\frac{2}{3}n\right) I_n = \frac{2}{3}nI_{n-1}$

$\Rightarrow \left(1+\frac{2}{3}\right) I_1 \left(1+\frac{2}{3}2\right) I_2 \left(1+\frac{2}{3}3\right) I_3 \cdots \left(1+\frac{2}{3}(n-1)\right) I_{n-1} \left(1+\frac{2}{3}n\right) I_n$

$=\frac{2}{3}I_0\frac{2}{3}2I_1\frac{2}{3}3I_2\cdots\frac{2}{3}(n-1)I_{n-2}\frac{2}{3}nI_{n-1}$

$\Rightarrow\left(1+\frac{2}{3}\right)\left(1+\frac{2}{3}2\right)\left(1+\frac{2}{3}3\right)\cdots\left(1+\frac{2}{3}(n-1)\right)\left(1+\frac{2}{3}n\right)I_n$

$=\frac{2}{3}I_0\frac{2}{3}2\frac{2}{3}3\cdots\frac{2}{3}(n-1)\frac{2}{3}n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}n!\cdot I_0$

$\Rightarrow\frac{5}{3}\frac{7}{3}\frac{9}{3}\cdots\frac{2n+1}{3}I_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}n!\cdot I_0\Rightarrow 5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+1)I_n=\frac{1}{9}\cdot 2^{n+1}\cdot n!$

Exercice 02:

(1) Calculer les intégrales définies suivantes:

$$I=.\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx \qquad \text{et} \qquad J=.\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

(2) Soit

$$I_n=\int\frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx\ .$$

Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}.

Exercice 05:(supp)

(1) Calculer l'intégrale indéfinie suivante:

$$A=\int\cos^2 x\ \sin^4 x\ dx$$

(2) Soient les intégrales définies:

$$I\ =\int_0^{\pi}x^2\cos^2 x dx \quad ,J=\int_0^{\pi}x^2\sin^2 x dx$$

Calculer: $I\ +J$ et $I\ -J$ (sans calcul de I et J). En déduire I et J.

(3) Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.

(a) Montrer, en utilisant un changement de variable, que:

$$\int_0^{\pi}x\ f\ (\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f\ (\sin x)\,\mathrm{d}x$$

(b) En déduire la valeur de:

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x \ \sin x}{1 + \cos^2 x} \ \mathrm{d}x$$

Partie IX

Applications linéaires:

5.28 Application linéaire:

Définition 90 *Soient E, F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et f une application de E dans F. Alors f est linéaire, si les propriétés suivantes sont satisfaites:*

$$1)\ \forall x, y \in E \text{ on a } f\ (x+y) = f\ (x) + f\ (y).$$
$$2) \forall x \in E\ , \forall \alpha \in \mathbb{k} \text{ on a } f\ (\alpha x) = \alpha\ f\ (x).$$

ou encore:

$$\forall x, y \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k} \text{ on a } f\ (\alpha x + \beta y) = \alpha\ f\ (x) + \beta\ f\ (y).$$

Exemple: *l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:*

$$f\ (x, y, z) = (x - y, y + 2z)$$

est une application linéaire.

5.29 Noyau d'une application linéaire:

Définition 91 *Soient E, F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors pour trouver le* ***noyau*** *de f, on résout l'équation $f\ (x) = 0_F$.*

Ainsi:

$$\ker f = \{x \in E, f\ (x) = 0_F\}$$

qui est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple: *l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:*

$$f\ (x, y, z) = (x - y, y + 2z)$$

est une application linéaire. Alors le noyau de f est:

$$\ker f = \{u \in E, f\ (u) = 0_{\mathbb{R}^2}\}$$

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. *On a:*

$$\begin{aligned} u \quad \in \quad & \ker f \Leftrightarrow f\ (u) = (0,0) \Leftrightarrow (x - y, y + 2z) = (0,0) \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -\frac{y}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow u = y\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

et donc $\ker f$ *est le s.e.v engendré par le vecteur* $\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)$ *noté:*

$$\ker f = Vect\left\{\left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

5.30 Injectivité d'une application linéaire:

Soient E, F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Notons que f est injective si et seulement si:

$$\forall x_1, x_2 \in E;\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f\ (x_1) \neq f\ (x_2)\,. \text{ ou bien } f\ (x_1) = f\ (x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Mais pour les applications linéaires, il suffit de montrer que: $\ker f = \{0_E\}$.

En fait on a:

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow \ker f = \{0_E\}\,.$$

Exemple:

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:

$$f\ (x, y) = (x - y, y + x)$$

Alors f est injective car:

$$\begin{aligned} u \quad = \quad & (x, y) \in \ker f \Leftrightarrow f\ (u) = 0_{\mathbb{R}^2}. \Leftrightarrow (x - y, y + x) = (0,0) \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} x - y = 0 \\ y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \end{aligned}$$

donc $\ker f = \{(0,0)\}$, et par suite f est injective.

5.31 Image d'une application linéaire:

Soient E, F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. L'image de f est l'ensemble de toutes les images des éléments de E par f. Ainsi:

$$\operatorname{Im} f = \{f\ (u)\,,\ u \in E\}\,.$$

De plus si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est une base de E, alors $\operatorname{Im} f = Vect\,\{f\ (e_1)\,, f\ (e_2)\,, ..., f\ (e_n)\}$ c'est à dire le sous-espace engendré par les vecteurs $f\ (e_1)\,, f\ (e_2)\,, ..., f\ (e_n)\,.$

Exemple:

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $B = \left(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$ une base de E et f l'endomorphisme de E défini par:

$$f\ \left(\vec{i}\right) = -\ \vec{i} +\ \vec{k},\ f\ \left(\vec{j}\right) =\ \vec{j} +\ \vec{k}\ ,\ f\ \left(\vec{k}\right) =\ \vec{i}\ + \vec{j}.$$

Alors l'image de f est définie comme suit:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= Vect\left\{f\ \left(\vec{i}\right), f\ \left(\vec{j}\right), f\ \left(\vec{k}\right)\right\} \text{ mais } f\ \left(\vec{k}\right) = f\ \left(\vec{j}\right) - f\ \left(\vec{i}\right) \\ &\Rightarrow\ \operatorname{Im} f = Vect\left\{f\ \left(\vec{i}\right), f\ \left(\vec{j}\right)\right\} = \left\{x\left(-\ \vec{i} +\ \vec{k}\right) + y\left(\ \vec{j} +\ \vec{k}\ \right), x, y \in \mathbb{R}\right\} \end{aligned}$$

5.32 Rang d'une application linéaire:

Soient E, F deux $\mathbb{k}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le rang d'une application linéaire est la dimension de l'iimage de cette application. On a:

$$rg\ f = \dim\left(\operatorname{Im} f\right).$$

de plus si E est de dimension finie, on a le théorème du rang:

$$\dim E = rg\ f + \dim\left(\ker f\right).$$

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par: $f\ (x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y)$. Alors on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{f(x,y)\,; x, y \in \mathbb{R}\} = \{(4x-2y, 6x-3y)\,; x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2x-y)(2,3)\,; x, y \in \mathbb{R}\} = \{\alpha(2,3)\,; \alpha \in \mathbb{R}\} \\ &= Vect\{(2,3)\} \end{aligned}$$

le vecteur $(2,3)$ est une base de $\operatorname{Im} f$, et par suite $rg\ f = 1$.

5.33 Endomorphisme, Isomorphisme, Automorphisme:

Soient E, F deux $\Bbbk$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

Si f est bijective, alors f est dite un **isomorphisme.**

Un **endomorphisme** de E est une application linéaire de E dans E.

Un **automorphisme** est une isomorphisme de E dans E.

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par: $f\ (x, y) = (x - y, x + y)$. Alors f est un automorphisme.

5.34 Projecteur:

Soit f un endomorphisme d'un $\Bbbk-$espace vectoriel. On dira que f est un projecteur, si l'on a:

$$\begin{aligned} f \circ f &= f \\ \text{ou bien } &: \operatorname{Im} f \text{ et } \ker f \text{ sont supplémentaires et que: } \forall x \in \operatorname{Im} f\ , f\ (x) = x. \end{aligned}$$

On dira que f est la projection sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\ker f$.

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par: $f\ (x, y) = (4x - 2y, 6x - 3y)$. Alors on

a :

$$\begin{aligned}(f \circ f)(u) &= f(f(u)) = f(x,y) = f(4x-2y, 6x-3y) \\ &= (4x-2y, 6x-3y) = f(u)\end{aligned}$$

et par suite f est un projecteur.

5.35 Symétrie:

Soit f un endomorphisme d'un $\Bbbk-$espace vectoriel. On dira que f est une symétrie, si l'on a:

$$\begin{aligned}f \circ f &= Id_E \\ \text{ou bien} &: \ker(f - Id_E) \text{ et } \ker(f + Id_E) \text{ sont supplémentaires .}\end{aligned}$$

On dira que f est la symétrie de E par rapport à $\ker(f - Id_E)$et parallèlement à $\ker(f + Id_E)$.

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par: $f(x,y) = (y,x)$. Alors on a :

$$(f \circ f)(u) = f(f(u)) = f(y,x) = (x,y)$$

et par suite f est une symétrie.

5.36 Exercice:

Exercice 01:

(1) On considère les applications suivantes définies de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Lesquelles sont linéaires?

a) $f : (x,y) \mapsto (x+2y, 2x-y)$;

b) $g : (x,y) \mapsto (x+2y, 2x-y+1)$;

c) $h : (x,y) \mapsto (x+y, 2xy)$;

d) $k : (x,y) \mapsto \left(x+y, x-y^2\right)$.

(2) Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par: $f\ (P) = P\ (1)$;

montrer que f est une application linéaire. ($\mathbb{R}[X]$: est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et dans le cas général $\mathbb{R}_n[X]$: est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n et à coefficients réels).

Exercice 02:

(1) Trouver les noyaux des applications linéaires suivantes:

a) $f\ (x, y) = (4x - 3y, 5x + 4y)$.

b) $g\ (x, y) = (6x - 4y, 9x - 6y)$.

(2) La même question pour les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies par:

a) $h\ (x, y, z) = (x + y + z, y, z)$.

b) $k\ (x, y, z) = (y + z, x + y + z, x)$.

Exercice 03:

(1) Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par:

$$f\,(x, y, z) = (x - 2y, x + y + 2z)$$

f est-elle injective?

(2) La même question pour les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définies ci-dessous:

a) $h\ (x, y, z) = (x + y + z, y, z)$.

b) $k\ (x, y, z) = (y + z, x + y + z, x)$.

Exercice 04:

(1) Déterminer les images des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ suivantes:

a) $f\ (x, y) = (4x - 3y, 5x + 4y)$.

b) $g\ (x, y) = (6x - 4y, 9x - 6y)$.

(2) Soit f l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ définie par: $f(P) = P + (1-X)P'$.

Déterminer l'image de cette application linéaire.

Exercice 05:

(1) Soit E un espace vectoriel de dimension 3 dont $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base. On considère l'endomorphisme f de E défini par:

$$f\left(\vec{i}\right) = -\vec{i} + 2\vec{k},\ f\left(\vec{j}\right) = \vec{j} + 2\vec{k}, f\left(\vec{k}\right) = 2\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Déterminer le rang de f.

(2) Soit E_3 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3, et soit f l'application définie sur E_3 par:

$$f(P) = X^2 P'' - 4X P' + 6P.$$

Déterminer le rang de f.

Exercice 06: Le plan vectoriel V_2 étant rapporté à une base $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère l'application linéaire de V_2 dans V_2 définie par:

$$f\left(\vec{i}\right) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{4}\vec{j},\ f\left(\vec{j}\right) = -\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}.$$

(1) Démontrer que f est un projecteur.

(2) Déterminer l'image et le noyau de f.

(3) Vérifier que $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans V_2 et que:

$$\forall x \in \operatorname{Im} f,\ f(x) = x.$$

Exercice 07: Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, (e_1, e_2) une base de E et f l'endomorphisme de E défini par:

$$f(e_1) = 2e_1 - e_2, f(e_2) = 3e_1 - 2e_2.$$

(1) Démontrer que f est une symétrie.

(2) Trouver $E_1 = \ker(f - Id_E)$ et $E_2 = \ker(f + Id_E)$.

Partie X

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce chapitre nous allons apprendre à résoudre les cas les plus élémentaires des équations différentielles du premier ordre et du second ordre à coefficients constantes

Défintion:

De nombreux problèmes d'origine physique, économique, etc. Conduisent à rechercher une fonction y d'une variable réelle x sachant qu'il existe une relation entre x, y et les dérivées $y^{(n)}$ avec $n \geq 1$. Une telle relation est dite équation différentielle d'ordre n et elle est de la forme:

$$f\ \left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0 \text{ où } f \text{ est une fonction.}$$

5.37 1-ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE 1:

Une équation différentielle d'ordre 1 est une équation de la forme:

$$f\ \left(x, y, y'\right) = 0 \text{ avec } y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

A-ÉQUATIONS Á VARIABLES SÉPARABLES

(OU SÉPARÉES) :

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Une équation différentielle à variables séparables est du type:

$$y' = \frac{f\ (x)}{g\ (y)}.$$

Ce qui implique que:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{f\ (x)}{g\ (y)} \Rightarrow g\ (y)\,\mathrm{d}y = f\ (x)\,\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \int g\ (y)\,\mathrm{d}y = \int f\ (x)\,\mathrm{d}x + c,\ c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Exemple:

$$y'\left(x^2 - 1\right) - 2xy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(x^2 - 1\right) - 2xy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{2x}{(x^2-1)}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2x}{(x^2-1)}\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln\left|x^2-1\right| + \ln c, c \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\Rightarrow y = c_1\left(x^2-1\right) \text{ où } c_1 \in \mathbb{R}^*$$

B-ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES HOMOGÈNE EN X ET Y:

C'est une équation du type:

$$y' = f\ \left(\frac{y}{x}\right)$$

On introduit la fonction auxiliaire $x \mapsto \mathrm{t} = \frac{y}{x}$; on a $y = \mathrm{t}\ x$ et $y' = \mathrm{t}'x + \mathrm{t}$. Finallement on a une équation à variables séparables:

$$\begin{aligned} \mathrm{t}' &= \frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d}x} = \frac{f\ (\mathrm{t}) - \mathrm{t}}{x} \\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{dt}}{f\ (\mathrm{t}) - \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \end{aligned}$$

Exemple:

$$
\begin{aligned}
(2x+y)\ \mathrm{d}x-(4x-y)\,\mathrm{d}y &= 0\\
&\Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(2x+y)}{(4x-y)}\\
&\Rightarrow\ y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\left(2+\frac{y}{x}\right)}{\left(4-\frac{y}{x}\right)}\\
\text{on pose}\quad :\mathrm{t} &= \frac{y}{x}\Rightarrow y=\mathrm{t}\ x\Rightarrow y'=\mathrm{t}'x+\mathrm{t}\\
&\Rightarrow\ \mathrm{t}'x+\mathrm{t}=\frac{(2+\mathrm{t})}{(4-\mathrm{t})}\\
&\Rightarrow\ \mathrm{t}'x=\frac{(2+\mathrm{t})}{(4-\mathrm{t})}-\mathrm{t}=\frac{\mathrm{t}^2-3\mathrm{t}+2}{(4-\mathrm{t})}\\
&\Rightarrow\ \frac{(4-\mathrm{t})}{\mathrm{t}^2-3\mathrm{t}+2}\mathrm{dt}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
\text{après résolution on a}\quad &:\quad \ln|x|+\ln c=\ln\frac{(\mathrm{t}-2)^2}{|\mathrm{t}-1|^3},c\in\mathbb{R}_+^*\\
&\Rightarrow\ \frac{(\mathrm{t}-2)^2}{|\mathrm{t}-1|^3}=k\ x\text{ où }k\in\mathbb{R}^*\\
&\Rightarrow\ (y-2x)^2=k\ (y-x)^3\ \text{ où }\ k\in\mathbb{R}^*
\end{aligned}
$$

Ainsi toutes les solutions de l'équation donnée sont définies par:

$$(y-2x)^2=k\ (y-x)^3\ \text{ où }\ k\in\mathbb{R}^*$$

C-ÉQUATION LINÉAIRE:

C'est une équation de la forme:

$$y'=a\ (x)\,y+b\,(x) \qquad (1)$$

où $a\ (x)$ et $b\ (x)$ sont deux fonctions continues sur un intervalle I.

L'équation:

$$y'=a\ (x)\,y \qquad (2)$$

est l'équation -homogène- ou -sans second membre- associée à (1).

Ainsi, la solution générale de (1) est la somme d'une solution particulière de cette équation

(1) et de la solution générale de l'équation homogène associée (2). Si on ne connaît aucune solution apparente de (1): on résout (2) , et on obtient sa solution générale $y = \lambda y_1$, où λ est une constante et $y_1 = e^A$, A étant une primitive de $a\ (x)$ sur I. Par suite on fait varier la constante. Posant, dans (1),

$$\begin{aligned} y\ (x) &= \lambda\ (x)\, y_1\ (x) \text{ on obtient:} \\ \lambda'(x)\, y_1(x) + \lambda(x)\, y_1'(x) &= a(x)\,\lambda(x)\, y_1(x) + b(x) \\ &\Rightarrow \lambda'(x)\, y_1(x) = b(x) \\ &\quad \text{car } y_1 \text{ est une solution de (2).} \\ &\quad \text{d'ou la connaissance de } \lambda'\text{, et celle de } \lambda \text{ par intégration.} \end{aligned}$$

Cette technique est connue sous le nom, de méthode de variation de le constante.

Exemple1: (la solution particulière)

L'équation:

$$y'\ \cos x + y\ \sin x = 1 \qquad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \text{ est linéaire.} \qquad (1)$$

Une solution évidente de étant $x \mapsto y_0(x) = \sin x$ et une solution apparente de l'équation homogène étant $x \mapsto y_1(x) = \cos x$, la solution générale de (1) est:

$$\begin{aligned} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x + \lambda \cos x \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Remarquons que ces solutions sont valables sur $\mathbb{R}$.

Exemple2: (la méthode de la variation de la constante)

L'équation:

$$y'\ + 2x\ y\ = 2x\ e^{-x^2} \qquad x \in \mathbb{R}, \text{ est linéaire.} \qquad (1)$$

Une solution de l'équation homogène $y'\ +2x\ y = 0$ étant $x \mapsto y_1(x) = \lambda e^{-x^2}$. Employons la

méthode de de la variation de la constante et reportons dans (1) $y\ (x) = \lambda(x)\ e^{-x^2}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \lambda'(x) = 2x \\ &\Rightarrow \quad \lambda(x) = \int 2x\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \quad \lambda(x) \quad = x^2 + k \quad \text{ où } \ k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi

$$y = \left(x^2 + k\right) e^{-x^2} \text{où} \ \ k \in \mathbb{R}$$

est une solution générale de l'équation (1).

D-ÉQUATION DE BERNOULLI:

Une équation de la forme:

$$y' = a\ \ (x)\, y + b(x)\ \ y^{\alpha} \qquad (x \in I)\ \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \qquad\qquad (1)$$

où $a\ (x)$ et $b\ (x)$ sont deux fonctions continues sur un intervalle I.

Cette équation est linéaire pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$. Dans le cas général, en l'écrivant:

$$y' y^{-\alpha} \ = a\ \ (x)\, y^{1-\alpha} + b(x)$$

donc si on pose: $z = y^{1-\alpha}$; on est alors ramené à une équation linéaire:

$$z' = (1 - \alpha)\left[a\ \ (x)\, z + b(x)\right]$$

Exemple:

$$\begin{aligned} xy' + y &= y^2 \ln x \\ y^{-2} xy' + y^{-1} &= \ln x \quad \text{(E)} \end{aligned}$$

c'est une équation de Bernoulli, alors on fait le changement: $z = y^{-1}$ d'où

$$z' = -\frac{y'}{y^2}$$

En remplaçant dans l'équation (E), on obtient

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec seconde membre.

La résolution de l'équation sans seconde membre

$$z' - \frac{1}{x}z = 0$$

donne

$$z\ (x) = c\ x \quad \text{où} \quad c \in \mathbb{R}$$

Par suite, en utilisant la méthode de la variation de la constante, on obtient pour $c\,(x)$, l'équation

$$c'\,(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

En intégrant par partie, on trouve:

$$c\ (x) = \frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + k \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}$$

Ainsi la solution générale de l'équation linéaire est donnée par

$$z\ (x) = \left(\frac{1}{x}\ln x + \frac{1}{x} + k\right)x$$

et puisque $z = y^{-1}$ alors la solution générale de (E) est

$$y\ (x) = \frac{1}{\ln x + kx + 1} \quad \text{où} \quad k \in \mathbb{R}$$

E-ÉQUATION DE RICCATI:

elle est de la forme:

$$y' = a\ \ (x)\, y^2 + b\,(x)\ \ y + c\ \ (x) \qquad (x \in I)\ \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

où $a\ (x)$, $b\ (x)$ et $c\ (x)$ sont trois fonctions continues sur un intervalle I.

On ne peut la résoudre que si on en connaît a priori une solution particulière y_1.on pose alors $y = y_1 + z$, z étant une nouvelle fonction inconnue, d'où

$$(1) \Leftrightarrow z' = a\ \ (x)\, z^2 + d\ \ (x)\ \ z$$

C'est une équation de Bernoulli qui se ramène à une équation linéaire en posant $\frac{1}{z} = u$.

5.37.1 Exemple:

$$\left(x^3 - 1\right) y' = y^2 + x^2 y - 2x$$

1-ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE 2 à COEFFICEINTS CONSTANTS:

Une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants est une équation de la forme

$$ay'' + by' + cy = f\,(x) \qquad (1^*)$$

où a, b et c sont des constantes réelles, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie et continue dans un intervalle I de $\mathbb{R}$.

L'équation (1^*) est dite une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre ($f\,(x)$). A lors pour résoudre l'équation (1^*) il faut suivre les deux étapes suivantes:

1ère étape: la résolution de (1^*) sans second membre:

Soit l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (2^*)$$

Comme remarque la résolution des équations linéaires sans seconde membre donne toujours une

seule solution y_1, par contre pour les équation de type (2^*) on trouve deux solutions y_1 et y_2. En effet pour résoudre (2^*) il faut trouver au premier lieu une équation équivalente à (2^*) dite équation caractéristique associée à (2^*) en remplace $y^{(n)}$ par r^n.

$$ar^2 + br + c = 0 \qquad (3^*)$$

Par suite on calcul le $\triangle$ et on trouve l'un des cas suivants

Le signe de $\triangle$	les solutions de (3^*)	Les solutions de (2^*)
$\triangle > 0$	deus solutions réelles r_1 et r_2	$y_1 + y_2 = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = c_1 z_1 + c_2 z_2$
$\triangle = 0$	une racine double r_0	$y_1 + y_2 = (c_1 x + c_2) e^{r_0 x} = c_1 z_1 + c_2 z_2$
$\triangle < 0$	deus solutions complexes r_1 et r_2 avec $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_1 = \alpha + i\beta$	$y_1 + y_2 = c_1 \cos \beta x e^{\alpha x} + c_2 \sin \beta x e^{\alpha x}$ $= c_1 z_1 + c_2 z_2$

2ème étape: la résolution de (1^*) avec second membre:

Il reste à trouver la troisième solution de l'équation (1^*), pour cela on peut appliquer l'un des deux méthodes suivantes:

1ère Méthode: Méthode de la solution particulière.

On peut utiliser cette méthode dans le cas où le second membre est l'un des fonctions suivantes: polynôme, sinus, cosinus, exponentielle, ou somme ou produit entre ces quatre fonctions. D'où les régles suivantes:

Le type du seconde membre	La solution particulière
polynôme	polynôme
sinus	contient le cosinus ainsi que le sinus
cosinus	contient le cosinus ainsi que le sinus
exponentielle	exponentielle

2ème Méthode: Méthode de la variation de la constante.

On remarque que chaque solution de l'équation sans seconde membre est de la forme: $c_1 z_1 + c_2 z_2$, alors la recherche de la solution de l'équation avec seconde membre par cette méthode est de la forme $y_3 = c_1(x) z_1 + c_2(x) z_2$ où $c_1(x)$, $c_2(x)$ sont des fonctions inconnues, dérivables

vérifiant la condition supplémentaire

$$c_1'(x)\, z_1 + c_2'(x)\, z_2 = 0$$

On utilise le fait que y_3 est une solution de (1^*) on obtient l'équation

$$c_1'(x)\, z_1' + c_2'(x)\, z_2' = f(x)$$

D'où le système

$$\begin{cases} c_1'(x)\, z_1 + c_2'(x)\, z_2 = 0 \\ c_1'(x)\, z_1' + c_2'(x)\, z_2' = f(x) \end{cases}$$

ce qui permet de trouver $c_1'(x)$ et $c_2'(x)$. Par intégration on trouve $c_1(x)$ et $c_2(x)$, ce qui donne le y_3.

Conclusion: La solution générale est:

$$Y = y_1 + y_2 + y_3$$

5.38 Exercice:

Exercice 01: Résoudre les équations suivantes:

(1) $x\, y' \ln x = (3 \ln x + 1)\, y$

(2) $y' = x \tan y$ (3) $x^2\, y' = x^2 + y^2 - x\, y$

(4) (supp) $(\tan y)\, xy' + (2x^2 - 1) = 0$, (5) (supp) $(1 + x^2)^2\, y' + 2x + 2x\, y^2 = 0$

(6) (supp) $x\, y' - y = x \left(1 - e^{-\frac{y}{x}}\right)$

Exercice 02: Résoudre les équations suivantes:

(1) $y' + y = \cos x + \sin x$ (2) $y' - \frac{1}{x}\, y = \frac{x}{1+x^2}$

(3) **(supp)** $y' + (\tan x)\, y = \frac{1}{\cos x}$ (4) **(supp)** $x\, y' + y = \arctan x$

Exercice 03: Résoudre les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
y^{"} - 5\, y' + 6\, y &= x^2 + e^{3x} \quad \text{(par la méthode de la variation de la constante).} \\
y^{"} - y' + y &= \sin x \quad \text{(la solution particulière)} \\
y^{"} + 2\, y' + y &= xe^{-x} \quad \text{(par la méthode de la variation de la constante).}
\end{aligned}$$

Exercice 04:(supp) Résoudre les équations suivantes:

$$x\, y' + y = x\, y^3$$

$$3y' \cos x - y \sin x - y^4 = 0$$

$$x^2 \left(y' + y^2 \right) = xy - 1 \quad \text{sachant que } \tfrac{1}{x} \text{ est une solution particulière.}$$

Exercice 05: (supp) Résoudre les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
y^{"} - 6\, y' + 6\, y &= (x+1)\; e^{3x} \quad \text{(par la méthode de la variation de la constante).} \\
y^{"} - y' + y &= x \sin x \quad \text{(par la méthode de la variation de la constante).} \\
y^{"} + 2\, y' + y &= x^2 + \sin x e^{-3x} \quad \text{(la solution particulière)}
\end{aligned}$$

5.39 Le corrigé des éxercices:

Exercice 01: Résoudre les équations suivantes:

(1) $x\, y' \ln x = (3 \ln x + 1)\, y$

(2) $y' = x \, \tan y$ (3) $x^2\, y' = x^2 + y^2 - x\, y$

(4) (supp) $(\tan y)\, xy' + \left(2x^2 - 1\right) = 0$, (5) (supp) $\left(1 + x^2\right)^2 y' + 2x + 2x\, y^2 = 0$

(6) (supp) $x\, y' - y = x \left(1 - e^{-\frac{y}{x}}\right)$

Solution:

$$(1)\qquad x\,y^{'}\ln x = (3\ln x+1)\,y \Leftrightarrow x\frac{dy}{dx}\ln x = (3\ln x+1)\,y$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y}=\frac{3\ln x+1}{x\ln x}dx \text{ , c'est une équation à variables séparables}$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{3}{x}dx+\frac{1}{x\ln x}dx$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = 3\ln|x|+\ln|\ln|x||+c, c\in\mathbb{R}^*$$

$$\Leftrightarrow |y| = e^c\,|x|^3\ln|x| \Leftrightarrow y=k\,|x|^3\ln|x|\,, k\in\mathbb{R}$$

$$(2)\ y^{'} = x\ \tan y \quad \Leftrightarrow \frac{dy}{\tan y}=xdx \Leftrightarrow \frac{\cos y}{\sin y}dy = xdx \Leftrightarrow \ln|\sin x| = \frac{x^2}{2}+c$$

$$\Leftrightarrow \quad |\sin x| = e^c e^{\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow x=\arcsin\left(ke^{\frac{x^2}{2}}\right), k\in\mathbb{R} \text{ et } -1\leq ke^{\frac{x^2}{2}}\leq 1.$$

$$(3)\, x^2\ y^{'} = x^2+y^2-x\ y \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=1+\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x} \text{ c'est une équation homogène.}$$

on pose : $t=\dfrac{y}{x}\Rightarrow y=t\ x\Rightarrow y\,'=t\,'x+t$

$$\Rightarrow \quad t\,'x+t=1+t^2-t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dt}{dx}x=1+t^2-2t\Rightarrow\frac{dt}{1+t^2-2t}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{dt}{(1-t)^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-t}=\ln|x|+c, c\in\mathbb{R}\Leftrightarrow t=1-\frac{1}{\ln|x|+c}, c\in\mathbb{R}.$$

Exercice 02: Résoudre les équations suivantes:

(1) $y^{'}+y=\cos x+\sin x$ (2) $y^{'}-\frac{1}{x}\ y=\frac{x}{1+x^2}$

(3) **(supp)** $y^{'}+(\tan x)\ y=\frac{1}{\cos x}$ (4) **(supp)** $x\ y^{'}+\ y=\arctan x$

$$(1)\quad y^{'}+y=\cos x+\sin x$$

$1^{ére}$- étape: La solution de l'équation sans seconde membre.

$$\begin{aligned} y'+y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=y \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y}=dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int dx \\ &\Rightarrow \ln|y| = -x+c, c\in\mathbb{R} \\ y_1 &= k\ e^{-x}, k\in\mathbb{R} \text{ solution de l'équation sans seconde membre.} \end{aligned}$$

$2^{ème}$- étape: La solution de l'équation avec seconde membre.

$$y'-y=\cos x+\sin x \ \ (1)$$

par la méthode de la solution particulière:

$$\begin{aligned} y_2 &= c_1\cos x + c_2\sin x \ \text{ est une solution particulière de}\,(1)\,. \\ &\Rightarrow y_2'+y_2=\cos x+\sin x \\ &\Rightarrow -c_1\sin x + c_2\cos x \ + c_1\cos x + c_2\sin x = \cos x+\sin x \\ &\Rightarrow \begin{cases} -c_1+c_2=1 \\ c_1+c_2=1 \end{cases} \Rightarrow c_2=1 \text{ et } c_1=0 \Rightarrow y_2=\sin x \end{aligned}$$

conclusion: la solution générale est définie par:

$$y=k\ e^{-x}+\sin x, k\in\mathbb{R}.$$

$$y^{'}-\frac{1}{x}\ y=\frac{x}{1+x^2}$$

$1^{ére}$- étape: La solution de l'équation sans seconde membre.

$$\begin{aligned} y'-\frac{1}{x}y &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \\ &\Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=\int\frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \ln|y|=\ln|x|+c, c\in\mathbb{R} \\ y_1 &= k\ x\ , k\in\mathbb{R} \text{ solution de l'équation sans seconde membre.} \end{aligned}$$

$2^{ème}$- étape: La solution de l'équation avec seconde membre.

$$y^{'} - \frac{1}{x}\ y = \frac{x}{1+x^2}.\ (1)$$

par la méthode de la variation de la constante:

$$\begin{aligned}
y_2 &= k(x)\ \ x \text{ est une solution particulière de} (1)\,. \\
&\Rightarrow\ y_2' - \frac{1}{x}y_2 = \frac{x}{1+x^2} \\
&\Rightarrow\ k\,'(x)\ \ x\ \ + k(x)\ \ x\ \ - k(x)\ \ x = \frac{x}{1+x^2} \\
&\Rightarrow\ k\,'(x) = \frac{1}{1+x^2} \\
&\Rightarrow\ \int k\,'(x)\,dx = \int\ \frac{1}{1+x^2}dx \Rightarrow k(x) =\ \ \arctan x \\
&\Rightarrow\ y_2 = x\ \ \arctan x
\end{aligned}$$

conclusion: la solution générale est définie par:

$$y = y_1 = k\ x + x\ \ \arctan x\ , k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 03: Résoudre les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
y^{"} - 5\ y^{'} + 6\ y &= x^2 + e^{3x} & &\text{(par la méthode de la variation de la constante).} \\
y^{"} -\ y^{'} +\ y &= \sin x & &\text{(la solution particulière)} \\
y^{"} + 2\ y^{'} +\ y &= xe^{-x} & &\text{(par la méthode de la variation de la constante).}
\end{aligned}$$

$$y^{"} - 5\ y^{'} + 6\ y = x^2 + e^{3x}\quad \text{(par la méthode de la variation de la constante).}$$

$1^{ére}$- étape: La solution de l'équation sans seconde membre.

$$\begin{aligned} y'' - 5\,y' + 6\,y &= 0 \quad (5) \\ \text{l'équation caractéristique est donnée par} &: \; r^2 - 5r + 6 = 0 \Rightarrow \triangle = 1 \\ &\Rightarrow \; r_1 = 2 \text{ et } r_2 = \;3 \\ \text{d'où la solution de } (5) \text{ est définie par} &: \; y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$2^{ème}$- étape: La solution de l'équation avec seconde membre. (2points)

1ére méthode: la méthode de la solution particulière:

$$\begin{aligned} y_2 &= ax^2 + bx + c, \quad \text{est une solution de } (4) \\ &\Rightarrow \; y_2'' - 2\,y_2' + \;y_2 = x^2 + 1 \\ &\Rightarrow \; (2a) - 2\,(2ax + b) + \left(ax^2 + bx + c\right) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} a = 1 \\ b - 4a = 0 \\ c - 2b + 2a = 1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \{a = 1, b = 4 \text{ et } c = 7$$

$$\Rightarrow \; y_2 = x^2 + 4x + 7$$

2ème méthode: la méthode de la variation de la constante:

$$\begin{aligned}
y_2 &= \left(c_1\left(x\right)\ x+c_2\left(x\right)\right)e^x \text{ est une solution de } (4)\\
&\Rightarrow\ {y_2}''-2\ {y_2}'+\ y_2=x^2+1\\
&\Rightarrow\ \begin{cases} \left(c_1'\left(x\right)\ x+c_2'\left(x\right)\right)e^x=0\\ c_1'\left(x\right)\ xe^x+c_1'\left(x\right)\ e^x+c_2'\left(x\right)e^x=x^2+1\end{cases}\\
&\Rightarrow\ \begin{cases} c_1'\left(x\right)=\left(x^2+1\right)e^{-x}\\ c_2'\left(x\right)=\left(-x-x^3\right)e^{-x}\end{cases}\\
\text{des intégrations par parties}\quad &:\ \Rightarrow\begin{cases} c_1\left(x\right)=\left[-3-2x-x^2\right]e^{-x}\\ c_2\left(x\right)=\left[x^3+3x^2+7x+6\right]e^{-x}\end{cases}\\
&\Rightarrow\ y_2=x^2+4x+7
\end{aligned}$$

Partie XI

Les Matrices.

Le but de ce chapitre est de trouver un moyen pour résoudre un système de n équation où n est un entier naturel assez grand, c'est la notion des matrices.

Dans le cas général on repésente une matrice M par:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

qu'on peut la simplifier par:

$$M = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & a_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

où $M_{m,n}$ est l'ensemble des matrices qui contient m lignes et n colonnes, de plus chaques a_{ij} represente le coefficient de la matrice M qui se trouve dans la $i - ème$ ligne et la $j - ème$ colonne. Dans le cas où $i = j$, les a_{ii} sont les éléments de la diagonale de M.

5.40 Matrices associées à une application linéaire dans le cas des espaces de dimensions finies.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions fines avec: $\dim E = n$ et $\dim F = m$. Choisissons dans E une base B_E, dans F une base B_F définies par:

$$\begin{aligned} B_E &= (e_1, e_2, ..., e_n) \\ B_F &= (f_1, f_2, ..., f_m) \end{aligned}$$

Soit φ une application linéaire de E dans F. Alors la matrice associée à φ par rapport à B_E et B_F qu'on note $M(\varphi, B_E, B_F)$ est obtenue comme suit:

la $i-ème$ colonne de $M(\varphi, B_E, B_F)$ représente les coordonnées de $\varphi(e_i)$ dans la base $B_F = f_1, f_2, ..., f_m$, en effet:

$$M(\varphi, B_E, B_F) = \begin{array}{c} \varphi(e_1)\,\varphi(e_2)\,.......\varphi(e_n) \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_m \end{array}$$

car:

$$\begin{aligned} \varphi(e_1) &= a_{11}f_1 + a_{21}f_2 + ... + a_{m1}f_m \\ \varphi(e_2) &= a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + ... + a_{m2}f_m \\ &\quad ... \\ \varphi(e_n) &= a_{1n}f_1 + a_{2n}f_2 + ... + a_{mn}f_m \end{aligned}$$

Exemple 5.30 *Soitφl'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui à (x, y, z) associe $(x - 2y + z, 2x + y + 3z)$,*

alors la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$est:

$$M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \varphi(e_1) & \varphi(e_1) \end{array} & \end{array}$$

car:

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0)\,, e_2 = (0,1,0)\,, e_3 = (0,0,1)\,, f_1 = (1,0) \;\; \textit{et } f_2 = (0,1) \\ \textit{de plus} &: \; \varphi(e_1) = (1,2) = \mathbf{1}.f_1 + \mathbf{2}.f_2 \;, \varphi(e_2) = (-2,1) = -\mathbf{2}.f_1 + \mathbf{1}.f_2 \\ \textit{et } \varphi(e_3) &= (1,3) = \mathbf{1}.f_1 + \mathbf{3}.f_2. \end{aligned}$$

5.41 Propriétés des matrices:

Soit M une matrice définie par:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & . & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

1- Une matrice est nulle si $\forall (i,j)\,, a_{ij} = 0$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ de plus c'est la matrice associée à l'application nulle $(\forall u \in E, \varphi(u) = 0_F)$.

2- Deux matrices A et B sont égales si: $a_{ij} = b_{ij}$ avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ avec les a_{ij} (resp. b_{ij}) représentent les coefficients de A (resp. B).

3- La matrice unité notée I est la matrice dont les $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $a_{ij} = 1$ si $i = j$.

4- Le transposée d'une matrice A noté ${}^tA$ est la matrice dont les lignes sont les colonnes de A et les colonnes sont les lignes de A.

5- Une matrice est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si: $a_{ij} = 0$ si $i > j$

(resp. $a_{ij} = 0$ si $i < j$) .

6- Une matrice diagonale est une matrice qui est à la fois triangulaire supérieure et triangulaire inférieure dont les éléments de la diagonales s'appelles les pivots.

Exemple 5.31 *Si:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow^t A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

De plus on a: $^t\ \left({}^tA\right) = A$.

5.42 Opérations sur les matrices:

Soient A et B deux matrices définies par:

$$A = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & a_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & b_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{k,l}$$

1- La somme de ces deux matrices est définie si: $m = k$ et $n = l$ et elle est donnée par:

$$A + B = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & a_{ij} + b_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

Exemple 5.32

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \; et \; B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$alors \quad : \quad A + B = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 7 \\ 14 & 14 & 14 \end{pmatrix}.$$

2- Le produit d'une matrice A par un scalaire λ avec:

$$A = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & a_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

est la matrice:

$$\lambda A = A = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & \lambda a_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

Exemple 5.33 *Si:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 5\lambda \\ 4\lambda & 6\lambda & 2\lambda \\ 3\lambda & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus on a: ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ et ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$.

3- La multiplication de deux matrices A et B définie par:

$$A = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & a_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,n}$$

$$\text{et } B = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & b_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{k,l}$$

est possible c'est-à-dire: $A \cdot B$ si $n = k$ autrement dit le nombre de colonnes de la première matrice A est égale le nombre de lignes de la deuxième matrice B.

Alors on a:

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & c_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \in M_{m,l}$$

c'est-à-dire le nombre de lignes de la matrice C est le nombre de lignes de A et le nombre de colonnes de C est le nombre de colonnes de B, avec chaque c_{ij} est la multiplication de la i^{ème} ligne de A par la $j^{ème}$ colonne de B mais terme à terme d'où:

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + ... + a_{im}b_{mj} \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}. \end{aligned}$$

Exemple 5.34 *Si:*

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3} \ et\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2} \\ \Rightarrow & \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 16 & 17 \\ 15 & 12 \end{pmatrix} \in M_{3,2}. \end{aligned}$$

Et on a: ${}^t(A \cdot B) ={}^t B \cdot {}^t A$ et dans le cas général la multiplication n'est pas permutative ($A \cdot B \neq B \cdot A$) car des fois $A \cdot B$ existe mais $B \cdot A$ n'existe pas.

5.43 Inverse d'une matrice carrée:

On peut représenter un système d'équation sous la forme matricielle d'où:

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{2n}x_n = y_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + ... + a_{nn}x_n = y_n \end{array}\right. \Leftrightarrow AX = Y$$

avec:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Alors pour chercher X il suffit d'inverser la matrice A et on a:

$$AX = Y \Leftrightarrow X = A^{-1}Y \text{ car: } A \cdot A^{-1} = I.$$

Pour cela les deux questions qui doit se poser sont l'existence et la méthode de la recherche de l'inverse de la matrice carrée A noté A^{-1}.

Dans un premier pas si A est la matrice associée à une application φ alors:

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{0_E\} \Leftrightarrow \ker(A) = \{0_E\}.$$

ou bien:

$$\begin{aligned} A \text{ inversible} &\Leftrightarrow \text{ les vecteurs colonnes de } A \text{ sont indépendants} \\ &\Leftrightarrow \text{ les vecteurs lignes de } A \text{ sont indépendants.} \end{aligned}$$

De plus on a:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \text{ et } \left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right).$$

5.43.1 Inversion d'une matrice par la méthode de GAUSS:

Pour déterminer l'inverse de la matrice A par la méthode de GAUSS il suffit d'appliquer des combinaisons linéaires simultanément à A et I qui transforment A en I et I en A^{-1}.

Exemple 5.35 *Calculer l'inverse de la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

En effet:

Le type d'opération sur la ligne (L)	$A \rightarrow$			$I \rightarrow$		
	1	2	1	1	0	0
	3	1	2	0	1	0
	-1	4	2	0	0	1
L_1	1	2	1	1	0	0
$L_2 - \left(\frac{3}{1}\right) L_1$	0	-5	-1	-3	$\frac{2}{5}$	0
$L_3 - \left(\frac{-1}{1}\right) L_1$	0	6	3	1	0	1
$L_1 - \left(\frac{2}{-5}\right) L_2$	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{4}{25}$	0
L_2	0	-5	-1	-3	$\frac{2}{5}$	0
$L_3 - \left(\frac{6}{-5}\right) L_2$	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{-13}{5}$	$\frac{12}{25}$	1
$L_1 - \left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{5}}\right) L_3$	1	0	0	$\frac{-16}{15}$	0	$\frac{-1}{3}$
$L_2 - \left(\frac{-1}{\frac{9}{5}}\right) L_3$	0	-5	0	$\frac{-58}{15}$	$\frac{14}{25}$	$\frac{1}{3}$
L_3	0	0	$\frac{9}{5}$	$\frac{-13}{5}$	$\frac{12}{25}$	1
$\frac{L_1}{1}$	1	0	0	$\frac{-16}{15}$	0	$\frac{-1}{3}$
$\frac{L_2}{-5}$	0	1	0	$\frac{58}{75}$	$-\frac{14}{125}$	$-\frac{1}{15}$
$\frac{L_3}{\frac{9}{5}}$	0	0	1	$\frac{-13}{9}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{5}{9}$

d'où:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ I \end{array} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-16}{15} & 0 & \frac{-1}{3} \\ \frac{58}{75} & -\frac{14}{125} & -\frac{1}{15} \\ \frac{-13}{9} & \frac{12}{45} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

Alors le principe est de rendre les constantes qui se trouvent en dehors de la diagonale est égales à zéro colonne par colonne, donc pour la constante 3 qui se trouve dans la deuxième ligne et la première colonne on a l'opération:

$$L_2 - \left(\tfrac{3}{1}\right) L_1$$

la ligne ou se trouve la constante moins la constante sur le pivot (a_{11}) fois la ligne du pivot

donc dans la première étape on élimine les deux constantes de la première colonne en utilisant le premier pivot, par contre dans la deuxième étape on élimine les deux constantes de la deuxième colonne en utilisant le deuxième pivot, dans la troisième étape on élimine les deux constantes de la troisième colonne en utilisant le troisième pivot, et dans chaque cas on utilise l'étape l'avant dernière. Finalement pour trouver I il suffit de diviser chaque ligne sur la constante qui se trouve dans la ligne.

5.43.2 Inversion d'une matrice par la notion du déterminant:

Les déterminants:

Le déterminant d'ordre 2:

Si A est une matrice d'ordre 2 définie par:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Alors le déterminant de A noté det A=$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ est donné par la formule: $ad - cb$.

Le déterminant d'ordre 3:

Si A est une matrice d'ordre 3 définie par:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Alors le déterminant de A noté det A=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ est donné par la formule: $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{22}a_{33}$

$-a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{33}$.

On peut obtenir ce développement par deux méthodes:

1- La règle de SARRUS:

Si $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ alors la règle de SARRUS consiste à répéter, au-dessous du tableau précédent, les deux premières lignes, et à affecter du signe + les produits obtenus parallèlement à la diagonale principale $\begin{vmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{33} \end{vmatrix}$, du signe - ceux obtenus parallèlement à la diagonale non principale $\begin{vmatrix} & & a_{13} \\ & a_{22} & \\ a_{31} & & \end{vmatrix}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

2- Le développement d'un déterminant suivant une rangée:

Dans le cas général c'est-à-dire: $A \in M_{n,n}$ on a:

$$A = \begin{pmatrix} & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ . & . & . & a_{ij} & . & . & . \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \\ & & & . & & & \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \triangle = \begin{vmatrix} & & & . & & & & \\ & & & . & & & & \\ & & & . & & & & \\ . & . & . & a_{ij} & . & . & . & . \\ & & & . & & & & \\ & & & . & & & & \\ & & & . & & & & \end{vmatrix}$$

Donc chaque déterminant d'ordre n est donné par une somme de n déterminant d'ordre $n-1$,

et il peut donc être développé de $2n$ façons suivant une de ses rangées, sous la forme:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ X_{ij} \qquad \text{développement suivant la ligne } i.$$

ou bien:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\ Y_{ij} \qquad \text{développement suivant la colonne } j.$$

avec:

$$X_{ij} = (-1)^{i+j} \triangle_{ij} \quad \text{, qui est le cofacteur de } a_{ij}.$$

$\triangle_{ij}$ étant le mineur de a_{ij}, déterminant d'ordre $n-1$ obenu en supprimant dans $\triangle$ la ligne et la colonne contenant a_{ij}.

La répartition des signes à prendre devant les mineurs est alternée à partir du signe + de a_{11}, par exemple un déterminant d'ordre 6:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Exemple 5.36 *Calculer le déterminant de*

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \det A &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ & \qquad \textit{c'est un développement suivant la première colonne.} \\ &= 2 - 8 - 12 + 12 - 4 + 1 = -9. \end{aligned}$$

Remarque 5.5 *Dans l'étape l'avant dernière de la méthode GAUSS. A est sous la forme diagonale* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$
donc on trouve le même résultat $\det A = -9$ *on multipliant les éléments de la diagonale.*

3- **Propriétés des déterminants:**

$$\begin{aligned} A \text{ est dite singulière si et seulement si } \det A &= 0 \\ A \text{ est dite régilière si et seulement si } \det A &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \lambda^n \det(A), \det\left({}^tA\right) = \det A \ , \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \\ \det(A \cdot B) &= \det(B \cdot A) \text{ et } \det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}. \end{aligned}$$

Inversion d'une matrice:

Pour qu'une matrice A est inversible il suffit que: $\det A \neq 0$ de plus on a:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot^t (\text{com } A)$$

avec (com A) est la comatrice de A obtenue en remplaçant chaque élément de A par son cofacteur ($X_{ij} = (-1)^{i+j} \triangle_{ij}$, est le cofacteur de a_{ij}).

Exemple 5.37 (1) *Dans le cas d'ordre 2:*

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Exemple 5.38 (2) *Soit la matrice:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ d'après les calculs qu'on fait:} \det A = 9$$

$$com\ A = \begin{pmatrix} -6 & -8 & 13 \\ 0 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow^t comA = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 3 \\ -8 & 3 & 1 \\ 13 & -6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot^t (com\ A) = \begin{pmatrix} \frac{-6}{9} & 0 & \frac{3}{9} \\ \frac{-8}{9} & \frac{3}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{13}{9} & \frac{-6}{9} & \frac{-5}{9} \end{pmatrix}.$$

5.44 Changement de base. Matrices semblables:

Soit, dans un espace vectoriel E de dimension n, deux bases:

$$B = (e_1, e_2, ..., e_n) \text{ et } B' = \left(e'_1, e'_2, ..., e'_n\right)$$

On veut étudier le lien entre les coordonnées d'un vecteur u de E dans les deux bases B et B' en utilisant les propriétés des matrices.

Si les vecteurs e'_j sont définies dans la base B par la formule: $e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i$, alors la matrice de passage de la base B à la base B'

est donnée par:

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & . & . & . & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & . & . & . & \alpha_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & . & . & . & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors si on pose:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } X\,' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_n \end{pmatrix}$$

les deux matrices d'un vecteur u dans B et B'. D'où les résultats suivants:

$$X = P \cdot X\,' \text{ ou bien } X\,' = P^{-1} \cdot X$$

Exemple 5.39 *Soit l'espace* $\mathbb{R}^3$ *muni de deux bases:*

$$B = (e_1, e_2, e_3) \ \text{ et } B' = \left(e_1', e_2', e_3'\right)$$

avec:

$$e_1 = (1,0,0)\,, e_2 = (0,1,0)\,, e_3 = (0,0,1)\,, e_1' = (2,3,0)\,, e_2' = (1,-1,1) \ \text{ et } e_3' = (-1,3,5)$$

$\Rightarrow$

$$P \quad = \quad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} & \end{array} \ \textit{(c'est la matrice de passage de } B \textit{ à } B'.$$

car par exemple: $e_1' = (2 \cdot e_1) + (3 \cdot e_2) + (0 \cdot e_3)\,,$ *alors il suffit de poser les vecteurs* e_1', e_2', e_3' *sous la forme vertical.*

Alors si le vesteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ *dans la base* $B \Rightarrow$ *dans* $B', X_1' = P^{-1}X_1.$

Et si le vecteur $X\,'_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ *dans la base* $B' \Rightarrow$ *dans* $B, X_2 = PX'_2$.

En effet:

$$\begin{aligned}
\det P &= 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -34 \\
et \quad &: \quad comA = \begin{pmatrix} -8 & -15 & -3 \\ -6 & 10 & -2 \\ 0 & -9 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow^t comA = \begin{pmatrix} -8 & -6 & 0 \\ -15 & 10 & -9 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \\
P^{-1} &= \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 15 & -10 & 9 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Alors:

$$X'_1 = P^{-1}X_1 = \frac{1}{34}\begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 \\ 15 & -10 & 9 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{38}{34} \\ \frac{28}{34} \\ \frac{48}{34} \end{pmatrix}$$

et:

$$X_2 = PX'_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 22 \end{pmatrix}$$

5.45 La matrice associée dans un changement de base:

Dans un endomorphisme:

Soit A_1 la matrice associée à un endomorphisme f dans la base B_1. Alors la matrice associée à f dans un changement de base B_2

est donnée par la formule:

$$A_2 = P^{-1} \cdot A_1 \cdot P$$

où P est la matrice de passage de la base B_1 à la base B_2.

1. **Exemple 5.40** *On considère l'application linéaire définie par:*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \quad &\mapsto \quad f\ (x, y, z) = (2x - y + z, 3x - y - 3z, 3x + y + z) \end{aligned}$$

(1) Déterminer la matrice M associée à f relativement a la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soient $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2, -1, -2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (3, 1, 2)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1.

b) Trouver la matrice de passage Q de la base B_1 à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

c) Si V est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

d) Trouver la matrice N associée à f relativement a la base B_1 .

Solution:

(1) La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est: $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ avec $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$

alors:

$$\begin{aligned} f\ (e_1) &= f\ (1, 0, 0) = (2, 3, 3) \\ f\ (e_2) &= f\ (0, 1, 0) = (-1, -1, 1) \\ f\ (e_3) &= f\ (0, 0, 1) = (1, -3, 1) \end{aligned}$$

ce qui implique que:

$$M = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_1) & f(e_1) \end{array} \end{array}$$

(2) Soient $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2, -1, -2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (3, 1, 2)$.

a) la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1.

$$P = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \end{array}$$

b) la matrice de passage Q de la base B_1 à la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$Q = P^{-1} = \frac{1}{\det P} \cdot^t (\text{com} P)$$

$$\begin{aligned} \text{suivant la } 2^{ème} \text{ ligne on a} \quad : \quad \det P &= -(-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 5 \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathrm{com}P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 10 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\
{}^{t}\left(\mathrm{com}P\right) &= \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 10 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c) Si $V_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminons alors les composantes de V_{B_1} dans la base B_1.

$$
\begin{aligned}
V_{B_1} &= Q \cdot V_B \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ -5 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

d) Trouvons la matrice N associée à f relativement a la base B_1.

$$\text{on a:} \qquad N = Q \cdot M \cdot P$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 2 & -1 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 13 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Dans une application linéaire définie de E dans F:

Soit A_1 la matrice associée à une application linéaire f définie de E muni d'une base B_1 dans F qui est muni de la base B_2.

Alors après le changement de base dans E par B_1' et dans F par B_2'. On a les deux matrices de passages de B_1 vers B_1' qu'on

la note par P et de B_2 vers B_2' notée Q Alors la matrice associée à f dans ces changements de bases

est donnée par la formule:

$$A_2 = Q^{-1} \cdot A_1 \cdot P$$

1. **Exemple 5.41** *On considère l'application linéaire définie par:*

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \quad &\mapsto \quad f\ (x,y,z) = (2x - y + z, 3x - y - z) \end{aligned}$$

(1) Déterminer la matrice M_1 associée à f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$.

(2) Soient $B_1' = \{u_1', u_2', u_3'\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1' = (2,-1,-2)$, $u_2' = (1,0,-1)$ et $u_3' =$

$(3,1,2)$

et $B_2' = \{e_1', e_2'\}$ avec $e_1' = (1,3)$ et $e_2' = (2,5)$ une base de $\mathbb{R}^2$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1'.

b) Trouver la matrice de passage Q de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base B_2'.

c) Trouver la matrice de passage P^{-1} de la base B_1' à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

d) Trouver la matrice de passage Q^{-1} de la base B_2' à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

e) Si V_1 est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V_1 dans la base B_1'.

f) Si V_2 est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ dans la base B_2', déterminer alors les composantes de V_2 dans la base canonique .

g) Trouver la matrice M_2 associée à f relativement aux bases B_1' et B_2' .

5.46 Exercice:

Exercice 01: On considère l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$f\ (x,y,z) = (2x - 6z, y + 5z, x - 3z)$$

(1) Montrer que f est une application linéaire.

(2) trouver le noyau de f $(\ker f)$.

(3) Déduire $\dim(\ker f)$ et $\dim(\operatorname{Im} f)$.

Exercice 02: Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse:

1) $A^2 = I \Rightarrow A = \pm I$ 2) $A^2 = 0 \Rightarrow A = 0$ 3) $A^2 = A \Rightarrow A = I$ ou $A = 0$.

4) supp A diagonale $\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A$ 5) supp $A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow A \cdot^t B =^t B \cdot A$

6) supp $A \cdot B = B \cdot A$ et A^{-1}existe$\Rightarrow A^{-1} \cdot B = B \cdot A^{-1}$

Exercice 03: Soit A une matrice carrée

1) Montrer que: si $A^4 = 0$ alors $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$. Dans ce cas $(I + A)$ est-elle inversible?

Si oui donner son inverse.

2) Supp: Montrer que: si $A^{n+1} = 0$ alors $(I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^n$. Dans ce cas $(I + A)$ est-elle inversible?

Si oui donner son inverse.

Exercice 04: **1)** Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ par la méthode de GAUSS et par la notion de la comatrice.

2) Déterminer le rang de la matrice suivante:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

Exercice 05: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & f\ (x, y) = (2x - y, 3x - 5y) \end{array}$$

(1) Trouver la matrice M associée à f relativement à la base canonique

B de $\mathbb{R}^2$.

(2) Soit $B_1 = \{u_1, u_2\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $u_1 = (2, -1)$, $u_2 = (5, 3)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base B_1.

b) Trouver la matrice de passage Q de la base B_1 à la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

c) Si V_1 est de composante $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

d) Déduire la matrice N associée à f relativement à la base B_1.

Exercice 05: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \quad &\mapsto \quad f\ (x, y, z) = (2x - y + z, 3x - y - z, 4x + y + z) \end{aligned}$$

(1) Trouver la matrice M associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2, -1, -2)$, $u_2 = (1, 0, -1)$ et $u_3 = (3, 1, 2)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1.

b) Si V est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

c) Trouver la matrice N associée à f relativement à la base B_1.

Exercice 06: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad f\ (x, y) = (x, y, x + y) \end{aligned}$$

Soient $B_2 = \{e_1, e_2\}$ et $B_3 = \{u_1, u_2, u_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

(1) Donner la matrice M associée à f relativement aux bases B_2 et B_3.

(2) Soient $C_2 = \{v_1, v_2\}$ une base de $\mathbb{R}^2$ avec $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,0)$ et $C_3 = \{w_1, w_2, w_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$

avec $w_1 = (0,1,3)$, $w_2 = (-1,0,1)$ et $w_3 = (-2,-1,0)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base B_2 à la base C_2.

b) Déterminer la matrice de passage Q de la base B_3 à la base C_3.

c) Si V est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base B_3, déterminer alors les composantes de V dans la base C_3.

d) Trouver la matrice N associée à f relativement aux bases C_2 et C_3.

5.47 Université de Tlemcen AnnéeUniversitaire : 2010 - 2011.

Faculté des sciences **Le: 17 - 02- 2011**

Tronc Commun LMD ST-SM **Epreuve Finale**

Module: MATH 1 Sujet n°1 **Durée: 1h 30**

Exercice 01: (9pts) Soient (U_n) et (V_n) deux suites définies par:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = \frac{1}{2} \\ V_{n+1} = \frac{U_{n+1} + V_n}{2} \end{cases}$$

(1) **(1 pt)** Montrer par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq U_n$.

(2) **(1 pt)** (U_n) est-elle croissante ou décroissante? justifier votre réponse.

(3) **(1 pt)** (V_n) est-elle croissante ou décroissante? justifier votre réponse.

(4) **(1 pt)** En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes.

(5) **(1 pt)** En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

(6) On définit la suite (W_n) par: $W_n = V_n - U_n$.

a) **(1 pt)** Montrer que (W_n) est une suite géométrique.

b) **(1 pt)** calculer la limite de (W_n) par deux méthodes différentes.

(7) Soit la suite (T_n) définie par:

$$T_n = \frac{U_n + 2V_n}{2}$$

a) **(1 pt)** Etudier la monotonie de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) **(1 pt)** En déduire:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} V_n.$$

EXERCICE 02: (7pts) Soit la suite (U_n) définie par:

$$U_0 = \frac{1}{2}, \qquad U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

(1) (1 pt+1 pt) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \ \rangle\ 0$ et $U_n \ \langle\ 1$.

(2) (1 pt) (U_n) est-elle croissante ou décroissante? justifier votre réponse.

(3) (0.5 pt) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

(4) (1 pt) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |U_n - 1|$$

(5) (1 pt) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - 1|$$

(6) (1.5 pt) En déduire de **(5)** la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

EXERCICE 03: (4pts) Soit f une fonction définie par: $\begin{cases} \frac{x^2 \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ \sin x - x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

(1) **(1 pt)** Donner l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) **(1.5 pt)** Cette fonction est-elle continue pour $x = 0$?

(3) **(1.5 pt)** Est-elle dérivable pour $x = 0$?

UniversitédeTlemcen **AnnéeUniversitaire : 2010 - 2011.**

Faculté des sciences

Commun LMD ST-SM **Epreuve Finale**

Module: MATH 1 Sujet n°1 "**Le corrigé**"

Exercice 01: Soient (U_n) et (V_n) deux suites définies par:

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_0 = \frac{1}{2} \\ V_{n+1} = \frac{U_{n+1} + V_n}{2} \end{cases}$$

(1) Montrons par récurrence que: $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq U_n$.

Pour $n = 0$ on a: $\frac{1}{2} < 3 \Rightarrow V_0 < U_0$. **(0.25 pt)**

Supposons que: $V_n \leq U_n$ pour un $n \in \mathbb{N}$ et montrons que: $V_{n+1} \leq U_{n+1}$.

$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{U_{n+1} + V_n}{2} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_{n+1}}{2} = \frac{V_n}{2} - \frac{U_n + V_n}{4} = \frac{V_n - U_n}{4} \leq 0$ d'après l'hypothèse de récurrence. **(0.75 pt)**

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq U_n$.

(2) **(1 pt)** (U_n) est-elle croissante ou décroissante?

$U_{n+1} - U_n = \frac{U_n + V_n}{2} - U_n = \frac{V_n - U_n}{2} \leq 0$ d'après (1)$\Rightarrow$ (U_n) est décroissante.

(3) **(1 pt)** (V_n) est-elle croissante ou décroissante?

$V_{n+1} - V_n = \frac{U_{n+1}+V_n}{2} - V_n = \frac{U_{n+1}-V_n}{2} = \frac{U_n+V_n}{4} - \frac{V_n}{2} = \frac{U_n-V_n}{4} \geq 0$ d'après (1)$\Rightarrow$ (V_n) est croissante.

(4) (1pt) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes.

- (U_n) est une suite décroissante minorée par $V_0 \Rightarrow (U_n)$ est convergente (on pose: l_1 sa limite).
- (V_n) est une suite croissante majorée par $U_0 \Rightarrow (V_n)$ est convergente (on pose: l_2 sa limite).

(5) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

- On a: $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq U_n$.**(0.25pt)**
- En plus: (U_n) est une suite décroissante et (V_n) est une suite croissante . **(0.25pt)**
- Dans la relation de récurrence on a: **(0.5pt)**

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{U_n + V_n}{2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{U_n + V_n}{2} \\ l_1 &= \frac{l_1 + l_2}{2} \Rightarrow l_1 = l_2. \end{aligned}$$

Alors les deux suites sont adjacentes.

(6) On définit la suite (W_n) par: $W_n = V_n - U_n$.

a) (1pt) Montrons que (W_n) est une suite géométrique.

$$\begin{aligned} \frac{W_{n+1}}{W_n} &= \frac{V_{n+1} - U_{n+1}}{V_n - U_n} = \frac{\frac{U_{n+1}+V_n}{2} - U_{n+1}}{V_n - U_n} \\ &= \frac{\frac{V_n - U_{n+1}}{2}}{V_n - U_n} = \frac{\frac{V_n - \frac{U_n+V_n}{2}}{2}}{V_n - U_n} = \frac{\frac{V_n - U_n}{4}}{V_n - U_n} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Alors (W_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) calculer la limite de (W_n) par deux méthodes différentes.

a) **(0.5pt)**

$$\lim_{n\to+\infty} W_n = \lim_{n\to+\infty} (V_n - U_n) = l_1 - l_2 = 0 \text{ car: } l_1 = l_2$$

b) **(0.5pt)**

$$W_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n W_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} W_n = 0.$$

(7) Soit la suite (T_n) définie par:

$$T_n = \frac{U_n + 2V_n}{2}$$

a) (1pt) Etudier la monotonie de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$T_{n+1} - T_n = \frac{U_{n+1}+2V_{n+1}}{2} - \frac{U_n+2V_n}{2} = \frac{\frac{U_n+V_n}{2}+2\frac{U_{n+1}+V_n}{2}}{2} - \frac{U_n+2V_n}{2}$
$= \frac{\frac{U_n+V_n}{2}+2\frac{\frac{U_n+V_n}{2}+V_n}{2}}{2} - \frac{U_n+2V_n}{2} = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Alors T_n est une suite constante.

b) (1pt) En déduire:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} V_n.$$

On a: $T_n = T_0 = \frac{U_0+2V_0}{2} = \frac{3+2\cdot\frac{1}{2}}{2} = 2 \Rightarrow$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n + 2V_n}{2} = \frac{l_1 + 2l_1}{2} = 2 \Rightarrow l_1 = l_2 = \frac{4}{3}.$$

EXERCICE 02: Soit la suite (U_n) définie par:

$$U_0 = \frac{1}{2}, \qquad U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

(1) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \ \rangle\ 0$ et $U_n \ \langle\ 1$.

a) $U_n > 0.....(A_n)$

Pour $n = 0$ on a: $U_0 = \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow (A_0)$ est vraie....**(0.25)**. Supposons que (A_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

et montrons que(A_{n+1}) est vraie ç-a-d:$U_{n+1} > 0$?

en effet: :$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} > 0$ **(0.75pt)**

D'où $U_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) $U_n < 1 \ldots\ldots (B_n)$

Pour $n = 0$ on a: $U_0 = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow (B_0)$ est vraie....**(0.25)**. Supposons que (B_n) est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

et montrons que(B_{n+1}) est vraie ç-a-d:$U_{n+1} < 1$?

en effet: :$U_{n+1} - 1 = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} - 1 = \dfrac{\frac{U_n-1}{2}}{\sqrt{\frac{1+U_n}{2}}+1} < 0$ **(0.75pt)**

D'où $U_n < 1 .. \forall n \in \mathbb{N}$.

(2) (1pt) (U_n) est-elle croissante ou décroissante?

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, car:

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} - U_n = \frac{\frac{1+U_n}{2} - U_n^2}{\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + U_n} \\ &= \frac{-2U_n^2 + U_n + 1}{\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + U_n} \geq 0 \text{ car } 0 < U_n < 1. \text{(après l'étude du polynôme)} \end{aligned}$$

(3) (0.5 pt) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente car elle est croissante majorée par 1.

(4) **(1 pt)** Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2} |U_n - 1|$$

$$|U_{n+1} - 1| = \left| \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} - 1 \right| = \left| \frac{\frac{U_n-1}{2}}{\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + 1} \right| \leq \frac{1}{2} |U_n - 1|$$

car: $$\frac{1}{\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + 1} \leq 1.$$

(5) (1 pt) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - 1|$$

D'après (4)

$$|U_n - 1| \leq \frac{1}{2}|U_{n-1} - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbf{2}} |U_{n-\mathbf{2}} - 1| \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathbf{n}} |U_{n-\mathbf{n}} - 1| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} |U_0 - 1|.$$

(6) (1.5 pt) En déduire de **(5)** la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} |U_n - 1| &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - 1| \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |U_n - 1| \leq \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - 1| = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} |U_n - 1| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n - 1 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 1 \end{aligned}$$

EXERCICE 03: Soit f une fonction définie par: $\begin{cases} \frac{x^2 \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ \sin x - x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

(1) (1pt) L'ensemble de définition de la fonction f est: $D_f = \mathbb{R}$.

(2) (1.5pt) Cette fonction est-elle continue pour $x = 0$?

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \ln x}{x+1} &= 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^-} (\sin x - x) = f\ (0) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f\ (x) = \lim_{x\to 0^-} f\ (x) = f\ (0) = 0 \end{aligned}$$

Alors f est continue en 0.

(3) (1.5pt) Est-elle dérivable pour $x = 0$?

La dérivée à droite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f\ (x) - f\ (0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x \ln x}{x+1} = 0$$

La dérivée à gauche:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{f\ (x) - f\ (0)}{x - 0} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{f\ (x) - f\ (0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f\ (x) - f\ (0)}{x - 0} \end{aligned}$$

Alors f est dérivable en 0.

Faculté des sciences **MATH 2**

Tronc Commun LMD ST-SM

Contrôle continu

Mai 2008 – Durée : 1 h 30.

N-B : **Inscrire le numéro de groupe sur la copie d'examen.**

****

le cours: (sur 6 points) **(1)** Donner la forme générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

(2) Résoudre l'équation :

$$x\ y^{'} +\ y = \arctan x$$

(3) Donner la forme générale d'une équation différentielle linéaire du $2^{\text{ème}}$ ordre à coefficients constants.

(4) Résoudre l'équation :

$$y^{"} + 2\ y^{'} +\ y = 4\ x^2.$$

ice 01: (sur 5.5 points) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$F = \{(x, y, z)\,;x = y = z\} \qquad G = \{(x, 0, z)\,;x \in \mathbb{R} \quad , z \in \mathbb{R}\}$$

(1) Montrer que F et G sont des s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(2) F et G sont-ils supplémentaires?.

cice 02:(sur 8.5 points) Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$$1) \quad \int \frac{1}{x\ (x-1)^2\ \ (x^2+1)} d\ x\ .$$

$$2) \quad \int \frac{d\ x}{\cos x - \sin x + 1}$$

$$3) \quad \int \frac{d\,x}{x^2+2x+2}$$

1. **(1)** Donner la forme générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

$$A(x)\; y^{'} + B(x)\; y = C(x) \quad \textbf{.....(0.25).}$$

avec $A(x)$, $B(x)$ et $C(x)$ sont des fonctions continues sur $I \subseteq \mathbb{R}$ **..........(0.25).**

(2) Résoudre l'équation :

$$x\; y^{'} + \; y = \arctan x$$

Sans seconde membre:......(1 point).

Avec seconde membre:......(1.25 point).

Conclusion..........(0.25)

(3) Donner la forme générale d'une équation différentielle linéaire du $2^{\text{ème}}$ ordre à coefficients constants.

$$Ay^{"} + B\; y^{'} + C\; y = f \quad (x)\,.\text{ ou } y^{"} + B\; y^{'} + C\; y = f \quad (x)\,.\ \textbf{.....(0.25).}$$

avec A , B et C sont des constantes ($A \neq 0$ **....(0.25)**) et $f\ (x)$ est une fonction continue sur $I \subseteq \mathbb{R}$ **..........(0.25).**

(4) Résoudre l'équation :

$$y^{"} + 2\; y^{'} + \; y = 4\; x^2.$$

Sans seconde membre:......(1 point).

Avec seconde membre:......(1 point).

Conclusion..........(0.25)

ice 01: (sur 5.5 points) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$F = \{(x,y,z)\,;x = y = z\} \qquad G = \{(x,0,z)\,;x \in \mathbb{R} \quad , z \in \mathbb{R}\}$$

(1)

$$\begin{aligned} F &\neq \varnothing \text{........}\textbf{(0.25) + (0.25) sur la preuve} \\ &...u_1 + u_2 \ \textbf{......(0.25)+ (0.25) sur la preuve} \\ &....\alpha u\text{..........}\textbf{(0.25)+ (0.25) sur la preuve, de même pour } G. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(0,0,0)\}\,\textbf{........(0.25)} \\ " &\supset " \ \textbf{......(0.25) + } " \subset "\textbf{......(0.5)} \\ \mathbb{R}^3 &= F + G\textbf{........(0.25)} \\ " &\supset " \ \textbf{......(0.25) + } " \subset "\textbf{......(0.5)} \end{aligned}$$

Conclsion: la somme est directe......**(0.25)** $\Rightarrow$ F et G sont supplémentaires.....**(0.25)**

cice 02:(sur 8.5 points) Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

1) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ (x-1)^2\ \ (x^2+1)} d\ x$.

la décomposition en éléments simples.....**(0.25 + 0.25 + 0.25 +0.25)**

calcul des 4 constantes.......**(0.25 + 0.25 + 0.25 + 0.25 +0.25)**

calcul des 3 intégrales......**(0.25 + 0.25 + 0.25+0.25+0.25)+ (0.25 sur**

2) $\displaystyle\int \frac{d\ x}{\cos x - \sin x + 1}$.

$$
\begin{aligned}
t &= \tan\frac{x}{2} \text{...........}\mathbf{(0.25)} \\
x &= 2\arctan z \text{...........}\mathbf{(0.25)} \\
dx &= \frac{2}{1+z^2}dz \text{...........}\mathbf{(0.25)} \\
\cos x &= \frac{1-z^2}{1+z^2} \text{...........}\mathbf{(\ 0.5\ )} \\
\sin x &= \frac{2z}{1+z^2} \text{...............}\mathbf{(0.5\ )} \\
\int \frac{\frac{2}{1+z^2}dz}{\frac{1-z^2}{1+z^2}. - \frac{2z}{1+z^2} + 1} &= \int \frac{2dz}{1-z^2-2z+1+z^2} = \text{.la réponse en } z = \text{.la réponse en } x
\end{aligned}
$$

(0.25 + 0.25 + 0.5 + 0.25) + (0.25 sur la cste)

3) $\displaystyle\int \frac{d\ x}{(x^2+2x+2)}$.

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{d\ x}{(x^2+2x+1+1)} \text{...........}\mathbf{(0.25)} \\
&\int \frac{d\ x}{(x+1)^2+1} \text{...........}\mathbf{(0.25)} \\
\text{On pose} \quad &: \quad y = x+1 \Rightarrow dx = dy \text{..........}\mathbf{(0.25)} + \mathbf{(0.25)} \\
\int \frac{d\ y}{y^2+1} &= \arctan y + c\ , \qquad c\in\mathbb{R} \text{..........}\mathbf{(0.25)} \\
&= \arctan(x+1) + c\ , \qquad c\in\mathbb{R} \text{..........}\mathbf{(0.25)}
\end{aligned}
$$

Université de Tlemcen **Année Universitaire : 2010-2011**

Faculté des sciences **MATH 1**

Commun LMD ST-SM **Contrôle continu (Le rattrapage)**

19 Janvier 2011 – Durée : 1 h 30.

Exercice 01:

(1) Soit E un ensemble sur lequel est définie une relation binaire $\Re$ qui est:

transitive et $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{E},$ x n'est pas en relation avec lui même par la relation $\Re$.

1. On définit sur E une autre relation Ψ définie par::

$$a \ \Psi b \Leftrightarrow a \ \Re b \quad \textbf{ou} \quad a = b$$

Ψ est-elle une relation d'ordre?

(2) Dans $\mathbb{Z}^*$ on définit la relation $\Im$ par:

$$x \quad \Im \ \ y \Leftrightarrow a \text{ divise } b \text{ ou } b \text{ divise } a.$$

caractériser l'ensemble quotient $\mathbb{Z}^*/\Im$ s'il existe?

(3) Dans $P(\mathbb{N})$, ensemble des parties de $\mathbb{N}$, on définit la relation d'ordre Φ par:

$$\forall (A, B) \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}), \ A \ \Phi \ B \Leftrightarrow B \subset A$$

(a) Cet ordre est-il total ? Justfier.

(b) Montrer que $P(\mathbb{N})$ admet un majorant et un minorant relativement à l'ordre Φ.

(4) Soit Ω la relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par:

$$x \quad \Omega \ \ y \Leftrightarrow \ \exists \, n \ \in \mathbb{N} \text{ tel que : } x^{\,n} = \ y \ .$$

Soit l'ensemble $A = \{1, \ 4, \ 8\}$. Déterminer s'ils existent, $Max \ A$ et $Min \ A$ pour l'ordre Ω.

Exercice 02:

Soit la fonction: $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ définie par:

$$x \mapsto f\ (x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

f est-elle injective? surjective? bijective? Justifier et si oui déterminer la fonction inverse (réciproque).

Exercice 03: Soient a et x des nombres réels. Montrer par l'absurde que:

Si $[a \neq 0$ et que l'on a $|x - a| < a]$ alors $[x \neq 0$ et le signe de x est le signe de $a]$.

.

Barème: Ex 01 : 11 pts ; Ex 02: 5 pts ; Ex 03: 4 pts .

Université de Tlemcen **Année Universitaire : 2010-2011**

Faculté des sciences **MATH 2**

Commun LMD ST-SM **Contrôle continu** **Le rattrapage" Le corrigé"**

04 Juin 2011 – Durée : 1 h 30.

Exercice 01: (5points) Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$$1) I_1 = \int \frac{dx}{1 - 2\sin x + \cos x} \quad .$$

On pose : $x = 2\arctan z \Rightarrow dx = \dfrac{2}{1+z^2}dz, \sin x = \dfrac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$ et $z = \tan\dfrac{x}{2}$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}dz}{1 - 2\cdot\frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z^2 - 2z + 1} = \int \frac{dz}{(z-1)^2} = -\frac{1}{z-1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = -\frac{1}{\tan\frac{x}{2} - 1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$
\begin{aligned}
2)\ I_2 &= \int \frac{2x+6}{3x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x+18}{3x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x+1+17}{3x^2+x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{6x+1}{3x^2+x+1}\,dx + \frac{17}{3}\int \frac{1}{3x^2+x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(3x^2+x+1\right) + \frac{17}{9}\int \frac{1}{x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{3}}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(3x^2+x+1\right) + \frac{17}{9}\int \frac{1}{x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}+\frac{1}{3}}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(3x^2+x+1\right) + \frac{17}{9}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{36}}\,dx \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(3x^2+x+1\right) + \frac{17}{9}\cdot\frac{36}{11}\int \frac{1}{\left(\frac{6x+1}{\sqrt{11}}\right)^2+1}dx
\end{aligned}
$$

on pose: $t=\frac{6x+1}{\sqrt{11}} \Rightarrow dt=\frac{6}{\sqrt{11}}dx \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{3}\ln\left(3x^2+x+1\right) + \frac{17}{9}\cdot\frac{36}{11}\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}\arctan\left(\frac{6x+1}{\sqrt{11}}\right) + c, c\in\mathbb{R} \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(3x^2+x+1\right) + \frac{34}{3\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{6x+1}{\sqrt{11}}\right) + c, c\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Exercice 02: (15 points)

(1) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tel que: $f\ (x)=x+e^x$ une fonction bijective.

On note g son application réciproque qui est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) (3 points) Sans calculer g trouver les valeurs de $g\,(1)\,, g'\,(1)$ et $g''\,(1)\,.$

On remarque que: $f\,(0)=1 \Rightarrow g\,(1)=0$. En plus on a: $g'\,(y)=\frac{1}{f\ '(x)}=\frac{1}{f\ '(g(y))} \Rightarrow g'\,(1)=\frac{1}{f\ '(0)}=\frac{1}{2}$.

De même: $g''\,(y)=\frac{-f\ ''(g(y))\cdot g'(y)}{(f\ '(g(y)))^2} \Rightarrow g''\,(1)=\frac{-f\ ''(0)}{(f\ '(0))^3}=-8$

b) (1point) En déduire le développement limité de g au point 1 à l'ordre 2.

Le Dl est: $\frac{1}{2}\,(x-1)-4\,(x-1)^2+o\,(x-1)^2\,.$

(2) (3points) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}^*$ pour qu'au voisinage de 0:

$$\arctan x - \frac{x - ax^3}{1 + bx^2} = o\left(x^5\right)$$

On a: $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$ et $\frac{x-ax^3}{1+bx^2} = x - (a+b)\,x^3 + b\,(a+b)\,x^5 + o\left(x^5\right)$ par la division suivant les puissances croissantes.

$$\arctan x - \tfrac{x-ax^3}{1+bx^2} = o\left(x^5\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b - \frac{1}{3} = 0 \\ b\,(a+b) - \frac{1}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \tfrac{-4}{15} \text{ et } b = \tfrac{3}{5}.$$

(3) Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$, $f\,(0) = 0$.

a) (1point) Ecrire la formule de Mac-Laurin de f à l'ordre 1.

$$f\,(x) = f\,(0) + f\,'\,(0)\;\; x + \frac{x^2}{2} f\,''\,(\theta x)\,, 0 < \theta < 1, \forall x \in [0,1]\,.$$

b) (3points) En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\,\geq 1}$ définie par le terme général:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} f\;\left(\frac{k}{n^2}\right), n \geq 1.$$

On:

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{k}{n^2} \leq 1, \forall n \geq 1 \text{ et } \forall k \in \{0, 1, ..., n\} \\
&\Rightarrow f\;\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2} f\,'\,(0) \;\; + \frac{k^2}{2n^4} f\,''\left(\theta \frac{k}{n}\right) \\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f\;\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f\,'\,(0)}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{f\,''\,(\theta \frac{k}{n})}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{f\,'\,(0)}{n^2} \cdot \frac{n\,(n+1)}{2} + \frac{f\,''\,(\theta \frac{k}{n})}{2n^4} \cdot \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \\
&\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{f\,'\,(0)}{2}.
\end{aligned}$$

Indication:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

(4) (2points+2points) Calculer les limites suivantes en utilisant la notion du développement limité.

$$a) \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \; b) \quad \lim_{x\to1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)} = \begin{cases} a \;\text{ si } b=a \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln\left(a^x\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^x}{2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\ln\left(a^x\frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^x}{2}\right)} \\ = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\ln a-\frac{1}{x}\ln 2+\frac{1}{x}\left(\frac{b}{a}\right)^x} = a \text{ si } b<a \\ = b \text{ si } a<b \end{cases} \\
&= \max(a,b).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}} \quad \text{on pose: } y=x-1 \\
&\Rightarrow b = \lim_{y\to0} e^{\tan\left(\frac{\pi y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\ln\left(\tan\left(\frac{\pi y}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right)} \\
&= \lim_{y\to0} e^{-\cot an\left(\frac{\pi y}{2}\right)\ln\left(\frac{1+\tan\frac{\pi y}{4}}{1-\tan\frac{\pi y}{4}}\right)} \\
&= \lim_{y\to0} e^{-\frac{2}{\pi y}\left(\frac{1+\tan\frac{\pi y}{4}}{1-\tan\frac{\pi y}{4}}-1\right)} = \lim_{y\to0} e^{-\frac{4\tan\frac{\pi y}{4}}{\pi y}} = e^{-1} \text{ car: } \tan\alpha \backsimeq \alpha \text{ au } V(0).
\end{aligned}$$

Barème: Ex 01 : 5pts ; Ex 02: 15pts.

Université de Tlemcen **Année Universitaire : 2010-2011**

Faculté des sciences **MATH 2**

Commun LMD ST-SM **Contrôle continu** **Le rattrapage**

04 Juin 2011 – Durée : 1 h 30.

Exercice 01: (5points) Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$$1)\int\frac{dx}{1-2\sin x+\cos x} \quad .$$

$$2) \int \frac{2x+6}{3x^2+x+1}\, dx \quad .$$

Exercice 02: (15 points)

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que: $f\ (x) = x + e^x$ une fonction bijective.

On note g son application réciproque qui est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) (3 points) Sans calculer g trouver les valeurs de $g\,(1)\,, g'\,(1)$ et $g''\,(1)\,.$

b) (1point) En déduire le développement limité de g au point 1 à l'ordre 2.

(2) (3points) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}^*$ pour qu'au voisinage de 0:

$$\arctan x - \frac{x - ax^3}{1 + bx^2} = o\left(x^5\right)$$

(3) Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$, $f\,(0) = 0$.

a) (1point) Ecrire la formule de Mac-Laurin de f à l'ordre 1.

b) (3points) En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\ \geq 1}$ définie par le terme général:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} f\ \left(\frac{k}{n^2}\right), n \geq 1.$$

Indication:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

(4) (2points+2points) Calculer les limites suivantes en utilisant la notion du développement limité.

$$a) \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}},\ b) \quad \lim_{x \to 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}}.$$

Barème: Ex 01 : 5pts ; Ex 02: 15pts.

Université de Tlemcen **Année Universitaire : 2010-2011**

Faculté des sciences **MATH 2**

Commun LMD ST-SM **Contrôle continu** **Le rattrapage" Le corrigé"**

04 Juin 2011 – Durée : 1 h 30.

Exercice 01: (5points) Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$$1)I_1 = \int \frac{dx}{1 - 2\sin x + \cos x} \quad .$$

On pose : $x = 2\arctan z \Rightarrow dx = \dfrac{2}{1+z^2}dz, \sin x = \dfrac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$ et $z = \tan\dfrac{x}{2}$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}dz}{1 - 2\cdot\frac{2z}{1+z^2} + \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z^2 - 2z + 1} = \int \frac{dz}{(z-1)^2} = -\frac{1}{z-1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = -\frac{1}{\tan\frac{x}{2} - 1} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}
2)\ I_2 &= \int \frac{2x+6}{3x^2+x+1}\ dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x+18}{3x^2+x+1}\ dx = \frac{1}{3}\int \frac{6x+1+17}{3x^2+x+1}\ dx \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{6x+1}{3x^2+x+1}\ dx + \frac{17}{3}\int \frac{1}{3x^2+x+1}\ dx \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(3x^2+x+1\right) + \frac{17}{9}\int \frac{1}{x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{3}}\ dx \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(3x^2+x+1\right) + \frac{17}{9}\int \frac{1}{x^2+\frac{x}{3}+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}+\frac{1}{3}}\ dx \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(3x^2+x+1\right) + \frac{17}{9}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{36}}\ dx \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(3x^2+x+1\right) + \frac{17}{9}\cdot\frac{36}{11}\int \frac{1}{\left(\frac{6x+1}{\sqrt{11}}\right)^2+1}dx
\end{aligned}$$

on pose: $t = \frac{6x+1}{\sqrt{11}} \Rightarrow dt = \frac{6}{\sqrt{11}} dx \Rightarrow$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{3}\ln\left(3x^2+x+1\right) + \frac{17}{9}\cdot\frac{36}{11}\cdot\frac{\sqrt{11}}{6}\arctan\left(\frac{6x+1}{\sqrt{11}}\right) + c, c\in\mathbb{R} \\ &= \frac{1}{3}\ln\left(3x^2+x+1\right) + \frac{34}{3\sqrt{11}}\arctan\left(\frac{6x+1}{\sqrt{11}}\right) + c, c\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

Exercice 02: (15 points)

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que: $f\ (x) = x + e^x$ une fonction bijective.

On note g son application réciproque qui est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) (3 points) Sans calculer g trouver les valeurs de $g(1), g'(1)$ et $g''(1)$.

On remarque que: $f(0) = 1 \Rightarrow g(1) = 0$. En plus on a: $g'(y) = \frac{1}{f\ '(x)} = \frac{1}{f\ '(g(y))} \Rightarrow g'(1) = \frac{1}{f\ '(0)} = \frac{1}{2}$.

De même: $g''(y) = \frac{-f\ ''(g(y))\cdot g'(y)}{(f\ '(g(y)))^2} \Rightarrow g''(1) = \frac{-f\ ''(0)}{(f\ '(0))^3} = -8$

b) (1point) En déduire le développement limité de g au point 1 à l'ordre 2.

Le Dl est: $\frac{1}{2}(x-1) - 4(x-1)^2 + o(x-1)^2$.

(2) (3points) Déterminer $a, b \in \mathbb{R}^*$ pour qu'au voisinage de 0:

$$\arctan x - \frac{x - ax^3}{1+bx^2} = o\left(x^5\right)$$

On a: $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o\left(x^5\right)$ et $\frac{x-ax^3}{1+bx^2} = x - (a+b)x^3 + b(a+b)x^5 + o\left(x^5\right)$ par la division suivant les puissances croissantes.

$$\arctan x - \frac{x-ax^3}{1+bx^2} = o\left(x^5\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} a+b-\frac{1}{3}=0 \\ b(a+b)-\frac{1}{5}=0 \end{array}\right. \Rightarrow a = \frac{-4}{15} \text{ et } b = \frac{3}{5}.$$

(3) Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$, $f(0) = 0$.

a) (1point) Ecrire la formule de Mac-Laurin de f à l'ordre 1.

$$f(x) = f(0) + f\ '(0)\ x + \frac{x^2}{2} f\ ''(\theta x), 0 < \theta < 1, \forall x \in [0,1].$$

b) (3points) En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\ \geq 1}$ définie par le terme général:

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} f\ \left(\frac{k}{n^2}\right), n \geq 1.$$

On:

$$\begin{aligned}
0 &< \frac{k}{n^2} \leq 1, \forall n \geq 1 \text{ et } \forall k \in \{0, 1, ..., n\} \\
&\Rightarrow f\ \left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2} f\ '(0)\ + \frac{k^2}{2n^4} f\ ''\left(\theta \frac{k}{n}\right) \\
&\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f\ \left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f\ '(0)}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{f\ ''(\theta \frac{k}{n})}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{f\ '(0)}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{f\ ''(\theta \frac{k}{n})}{2n^4} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} U_n = \frac{f\ '(0)}{2}.
\end{aligned}$$

Indication:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(4) (2points+2points) Calculer les limites suivantes en utilisant la notion du développement limité.

$$a) \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \ b) \lim_{x \to 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} &= e^{\frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)} = \begin{cases} a \text{ si } b = a \\ \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln\left(a^x \frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^x}{2}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln\left(a^x \frac{1+\left(\frac{b}{a}\right)^x}{2}\right)} \\ = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{\ln a - \frac{1}{x}\ln 2 + \frac{1}{x}\left(\frac{b}{a}\right)^x} = a \text{ si } b < a \\ = b \text{ si } a < b \end{cases} \\
&= \max(a, b).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to 1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}} \quad \text{on pose: } y = x-1 \\ \Rightarrow\ & b = \lim_{y\to 0} e^{\tan\left(\frac{\pi y}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\ln\left(\tan\left(\frac{\pi y}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right)} \\ &= \lim_{y\to 0} e^{-\cot an\left(\frac{\pi y}{2}\right)\ln\left(\frac{1+\tan\frac{\pi y}{4}}{1-\tan\frac{\pi y}{4}}\right)} \\ &= \lim_{y\to 0} e^{-\frac{2}{\pi y}\left(\frac{1+\tan\frac{\pi y}{4}}{1-\tan\frac{\pi y}{4}}-1\right)} = \lim_{y\to 0} e^{-\frac{4\tan\frac{\pi y}{4}}{\pi y}} = e^{-1} \text{ car: } \tan\alpha \backsimeq \alpha \text{ au } V(0). \end{aligned}$$

Barème: Ex 01 : 5pts ; Ex 02: 15pts.

Université de Tlemcen **Année Universitaire : 2010-2011**

Faculté des sciences **MATH 2**

Commun LMD ST-SM **Contrôle continu** **Sujet 1**

21 Mai 2011 – Durée : 1 h 30.

Exercice 01: Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$$1) \int \frac{dx}{1-2\sin x+\cos x} \quad .$$

$$2) \quad \int \sin^4 x \ \cos^2 x \ dx \ .$$

$$3) \quad \int \frac{x+6}{x^2+x+1}\ dx \quad .$$

Exercice 02: Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(a,b,b-a)\in\mathbb{R}^3/\ a,b\in\mathbb{R}\right\} \quad \text{ et } E_2 = \left\{(a,b,-a)\in\mathbb{R}^3/\ a,b\in\mathbb{R}\right\}.$$

avec E_2 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

(3) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

(4) Est ce que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$? justifier votre réponse.

(5) Déterminer $E_1 \cap E_2$.

(6) Déduire si la somme est directe ou non.

Exercice 03: **(1)** Citer les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes:

$$(1)\ f\ (u) = \sin u \qquad , \ (2) \quad g\,(u) = \ln\,(1+u)$$

(2) Déduire les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions:

$$k\ (x) = \ln\,(1+\sin x)\,, \quad h\,(x) = e^{\sin x} \quad \text{et } L\,(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Barème: Ex 01 : pts ; Ex 02: pts ; Ex 03: pts.

Université de Tlemcen **Année Universitaire : 2010-2011**

Faculté des sciences **MATH 2**

Tronc Commun LMD ST-SM $\boxed{\textbf{Contrôle continu}}$ **Sujet 1**

21 Mai 2011 – Durée : 1 h 30.

Exercice 01: (8 points) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$\boxed{E_1 = \left\{(a,b,b-a) \in \mathbb{R}^3 /\ a,b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{et } E_2 = \left\{(a,b,-2a) \in \mathbb{R}^3 /\ a,b \in \mathbb{R}\right\}.}$$

avec E_2 s-e-v de $\mathbb{R}^3$.

(1) (1point) Montrer que E_1 est un s-e-v de $\mathbb{R}^3$.

(2) (2points) Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

(3) (1point) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

(4) (2points) A-t-on: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$? Justifier votre réponse.

(5) (1point) Déterminer $E_1 \cap E_2$.

(6) (1point) Déduire si la somme est directe ou non.

Exercice 02: (12 points) **(1) (1.5 point+1.5 point)** Citer les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes:

(1) $f\ (u)\ = \sin u$	(2) $g(u) = \ln(1+u)$.

(2) (2points+2 points) Calculer les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes:

$k(x) = \ln(1+\sin x)$	$h(x) = e^{\sin x}$

(3) (3points) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de la fonction M définie par:

$$\boxed{M(x) = \left(1+x+x^2\right)^{\frac{1}{x}}.}$$

(4) (2points) Calculer l'intégrale indéfinie suivante:

$$\int \frac{xdx}{(2-x)^2}.$$

Université de Tlemcen **Année Universitaire : 2010-2011**

Faculté des sciences **MATH 2**

Commun LMD ST-SM **Contrôle continu - Sujet 1 - Le Corrigé.**

21 Mai 2011 – Durée : 1 h 30.

Exercice 01: (8 points) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$E_1 = \{(a, b, b-a) \in \mathbb{R}^3 / \ a, b \in \mathbb{R}\} \quad \text{ et } E_2 = \{(a, b, -2a) \in \mathbb{R}^3 / \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

avec E_2 s-e-v de $\mathbb{R}^3$.

(1) (1point) Montrons que E_1 est un s-e-v de $\mathbb{R}^3$.

a) $E_1 \neq \emptyset$?

$(0,0,0) \in E_1 \Rightarrow E_1 \neq \emptyset$.

b) $\forall \ u_1, u_2 \in E_1 \Rightarrow u_1 + u_2 \in E_1$?

Soient $u_1, u_2 \in E_1 \Rightarrow u_1 = (a_1, b_1, b_1 - a_1)$ et $u_2 = (a_2, b_2, b_2 - a_2)$

$\Rightarrow u_1 + u_2 = ((a_1 + a_2), (b_1 + b_2), (b_1 + b_2) - (a_1 + a_2)) \in E_1$

c) $\forall \ u \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in E_1$?

Soient $u \in E_1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow u = (a, b, b-a)$

$\Rightarrow \alpha u = (\alpha a, \alpha b, \alpha b - \alpha a) \in E_1$

Conclusion: E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(2) (2points) Déterminons une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

a)

$$u \in E_1 \Rightarrow u = (a, b, b-a) = a \ (1, 0, -1) + b \ (0, 1, 1)$$

alors $B_1 = \{(1, 0, -1), (0, 1, 1) \ \}$ engendre E_1. mais:

$$\alpha (1, 0, -1) + \beta (0, 1, 1) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

alors les deux vecteurs de B_1 sont linéairements indépendants.

Ce qui implique que $B_1 = \{ \ (1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$ est une base de E_1.

b)

$$u \in E_2 \Rightarrow u = (a, b, -2a) = a\ \ (1, 0, -2) + b\,(0, 1, 0)$$

alors $B_2 = \{\ (1, 0, -2), (0, 1, 0)\}$ engendre E_2. mais:

$$\alpha\,(1, 0, -2) + \beta\,(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

alors les deux vecteurs de B_2 sont linéairements indépendants.

Ce qui implique que $B_2 = \{\ (1, 0, -2), (0, 1, 0)\}$ est une base de E_2.

(3) (1 point) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

$$\dim E_1 = 2 \quad \text{et} \qquad \dim E_2 = 2.$$

(4) A-t-on: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$? Justifier votre réponse.

a) (0,5 point) " $\supset$" $\quad E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $\quad E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$.

b) (1.5 point) "$\subset$" soit $u \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow u = (x, y, z) = (a, b, b - a) + (\alpha, \beta, -2\alpha)$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = a + \alpha \\ y = b + \beta \\ z = b - a - 2\alpha \end{array} \right. \quad \Rightarrow \text{pour } b = 0 \text{ par exemple on trouve} \left\{ \begin{array}{c} \alpha = -x - z \\ a = 2x + z \\ \beta = y \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow u = (x, y, z) = (2x + z, 0, -2x - z) + (-x - z, y, 2x + 2z)$$

$$\in E_1 + E_2 \text{ d'où: } \ \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2.$$

(5) (1point) Déterminons $E_1 \cap E_2$.

$$\begin{array}{rcl} \text{si} & : & u \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow u = (a, b, b - a) \text{ et } u = (a, b, -2a) \\ b - a & = & -2a \Rightarrow a = -b \Rightarrow E_1 \cap E_2 = \{(-b, b, 2b)\,; b \in \mathbb{R}\} = \{b\,(-1, 1, 2)\,; b \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

(6) (1point) Déduire si la somme est directe ou non.

$$\begin{aligned}\dim E_1 &= 2 \quad \text{et} \quad \dim E_2 = 2\\ &\Rightarrow \dim E_1 + \dim E_2 = 4 \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3\end{aligned}$$

ou bien

$$E_1 \cap E_2 \neq \{(0,0,0)\}$$

ce qui implique que la somme n'est pas directe.

Exercice 02: (12 points) **(1) (1.5 point+1.5 point)** Citer les développements limités à l'ordre 4 au voisinage de 0 des fonctions suivantes:

(1) $f\ \ (u)\ \ = \sin u$	(2) $g(u) = \ln(1+u)$.

En effet:

$f\ \ (u)\ \ = \sin u = u - \frac{u^3}{6} + u^4 \varepsilon_1(u)$ avec $\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon_1(u) = 0$
$g(u) = \ln(1+u) = u - \frac{u2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + u^4 \varepsilon_2(u)$ avec$\lim\limits_{u \to 0} \varepsilon_2(u) = 0$

(2) (2points+2points) Calculer les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes:

$$k(x) = \ln(1+\sin x), h(x) = e^{\sin x}$$

En effet:

$$\begin{aligned}k(x) &= \ln(1+\sin x) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon_3(x) \ \text{avec}\lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon_3(x)\, avec \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
h(x) &= e^{\sin x} \text{ on a: } e^{u}=1+u+\frac{u^{2}}{2}+\frac{u^{3}}{6}+u^{3}\varepsilon_{4}(u) \text{ avec} \lim_{u\to 0}\varepsilon_{4}(u)=0 \\
\Rightarrow e^{\sin x} &= 1+\left(x-\frac{x^{3}}{6}\right)+\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{6}+x^{3}\varepsilon_{5}(x) \text{ avec} \lim_{u\to 0}\varepsilon_{5}(u)=0 \\
&= 1+x+\frac{x^{2}}{2}+x^{3}\varepsilon_{5}(x) \text{ avec} \lim_{u\to 0}\varepsilon_{5}(u)=0
\end{aligned}$$

(3) (3points) Calculer le développement limité à l'ordre 3 au point 0 de la fonction M définie par:

$$\boxed{M(x)=\left(1+x+x^{2}\right)^{\frac{1}{x}}.}$$

$M(x)=\left(1+x+x^{2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+x+x^{2}\right)}$

On a: $\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^{2}+\frac{1}{3}u^{3}-\frac{1}{4}u^{4}+u^{4}\varepsilon(u)\to 0$ qd $u\to 0$ (à l'ordre 4), donc si on pose: $u=x+x^{2}$

on trouve: $\ln\left(1+x+x^{2}\right)=x+\frac{x^{2}}{2}-\frac{2}{3}x^{3}+\frac{x^{4}}{4}+x^{4}\varepsilon_{1}(x)$ (on tronque que les termes d'ordre ≤ 4)

$\Rightarrow \frac{1}{x}\ln\left(1+x+x^{2}\right)=1+\frac{x}{2}-\frac{2}{3}x^{2}+\frac{x^{3}}{4}+x^{3}\varepsilon_{1}(x)$ mais: $e^{u}=1+u+\frac{1}{2!}u^{2}+\frac{1}{3!}u^{3}+u^{3}\varepsilon_{2}(u)$ avec $\varepsilon_{2}(u)\to 0$ qd $u\to 0$ (à l'ordre 3).

$\Rightarrow e^{\frac{1}{x}\ln\left(1+x+x^{2}\right)}=e^{1+\frac{x}{2}-\frac{2}{3}x^{2}+\frac{x^{3}}{4}+x^{3}\varepsilon_{1}(x)}=e\ e^{\frac{x}{2}-\frac{2}{3}x^{2}+\frac{x^{3}}{4}+x^{3}\varepsilon_{1}(x)}$

Donc il suffit de remplaçer dans le D.L de e^{u} le u par $\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}x^{2}+\frac{x^{3}}{4}\right)$(on tronque que les termes d'ordre ≤ 3)

$\Rightarrow M\ (x)=e\left(1+\frac{x}{2}-\frac{13}{24}x^{2}-\frac{1}{16}x^{3}+x^{3}\varepsilon(x)\right)$

1. **(4) (2points)** Calculer l'intégrale indéfinie suivante:

$$\int\frac{xdx}{(2-x)^{2}}.$$

$$\int\frac{xdx}{(2-x)^{2}}=\int\frac{x-2+2dx}{(2-x)^{2}}=\int\frac{dx}{(x-2)}+2\int\frac{dx}{(2-x)^{2}}=\ln|x-2|+\frac{2}{2-x}+c, c\in\mathbb{R}$$

Faculté des sciences **MATH 2**

Commun LMD ST-SM **Contrôle continu**

08 Mai 2010 – Durée : 1 h 30.

Exercice 01: **(1)** Ecrire en fonction de x les deux fonctions: $\cos(\arcsin x)$ et $\sin(\arccos x)$.

(2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation:

$$\arcsin x = \arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{3}{5}$$

(3) Montrer que:

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 02: Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3 / \ a, b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{et } E_2 = \left\{(c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3 / \ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

avec E_2 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

(3) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

(4) Montrer que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

(5) Déduire si la somme est directe ou non.

Exercice 03: Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$$1) \quad I_1 = \int \sin^2 3x \ \ \mathrm{d}x \ .$$

$$2) \quad I_2 = \int \frac{x+3}{x^2 - x + 5} \ \mathrm{d}x.$$

3) $I_3 = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x-\cos x}$ en utilisant le changement de variable: $x = 2\arctan z$.

$$4)\ \ I_4 = \int \cos 2x \ \ e^{3x}\mathrm{d}x\ .$$

Barème: Exercice 01: 5pts ; Exercice 02: 7pts ; Exercice 03: 8pts.

Université de Tlemcen **Année Universitaire : 2009-2010**

Faculté des sciences **MATH 2**

Tronc Commun LMD ST-SM

Contrôle continu (Le corrigé)

Exercice 01: **(1) (2points)** Ecrire en fonction de x les deux fonctions: $\cos(\arcsin x)$ et $\sin(\arccos x)$.

$$\begin{aligned}
\text{on a} \quad &: \quad \cos^2 y+\sin^2 y = 1 \Rightarrow \cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} \\
\text{puisque } -\frac{\pi}{2} \quad &\leq \quad (\arcsin x) \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(\arcsin x) \geq 0 \\
&\Rightarrow \quad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2} \\
\text{de même} \quad &: \quad \sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y} \Rightarrow \sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2\arccos x} \\
&\Rightarrow \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \text{ car: } 0 \leq (\arccos x) \leq \pi
\end{aligned}$$

(2) (2points) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation:

$$\begin{aligned}
\arcsin x \quad &= \quad \arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{3}{5} \\
\text{On a} \quad &: \quad \sin(a+b) = \sin a\cos b+\cos a\sin b \\
&\Rightarrow \quad \sin\arcsin x = x = \sin\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{3}{5}\right) \\
&= \quad \sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)+\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cdot\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) \\
&= \quad \frac{4}{5}\cdot\sqrt{1-\frac{9}{25}}+\sqrt{1-\frac{16}{25}}\cdot\frac{3}{5} = \frac{16}{25}+\frac{9}{25} = 1 \Rightarrow x = 1.
\end{aligned}$$

(3) (1point) Montrer que:

$$\begin{aligned}
\arccos x + \arcsin x &= \frac{\pi}{2}. \\
\text{Si on pose} &: \ f\ (x) = \arccos x + \arcsin x \\
&\Rightarrow \ f\ '(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \\
&\Rightarrow \ f\ (x) = \text{c, c est une constante, mais } f\ (0) = \frac{\pi}{2} \\
&\Rightarrow \ f\ (x) = \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 02: Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(a+b, b-3a, a) \in \mathbb{R}^3 /\ a, b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{et } E_2 = \left\{(c, -2c, c) \in \mathbb{R}^3 /\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

avec E_2 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(1)(1 point) Montrons que E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$?.

a) $E_1 \neq \emptyset$?

$(0,0,0) \in E_1 \Rightarrow E_1 \neq \emptyset$

b) $\forall\ u_1, u_2 \in E_1 \Rightarrow u_1 + u_2 \in E_1$?

Soient $u_1, u_2 \in E_1 \Rightarrow u_1 = (a_1 + b_1, b_1 - 3a_1, a_1)$ et $u_2 = (a_2 + b_2, b_2 - 3a_2, a_2)$

$\Rightarrow u_1 + u_2 = ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), (b_1 + b_2) - 3(a_1 + a_2), (a_1 + a_2)) \in E_1$

c) $\forall\ u \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in E_1$?

Soient $u \in E_1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow u = (a+b, b-3a, a)$

$\Rightarrow \alpha u = (\alpha a + \alpha b, \alpha b - 3\alpha a, \alpha a) \in E_1$

Conclusion: E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(2) (2 points) Déterminons une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

a)

$$u \in E_1 \Rightarrow u = (a+b, b-3a, a) = a\ (1,-3,1) + b\ (1,1,0)$$

alors $B_1 = \{(1,-3,1),(1,1,0)\ \}$ engendre E_1. mais:

$$\alpha(1,-3,1) + \beta(1,1,0) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

alors les deux vecteurs de B_1 sont linéairements indépendants.

Ce qui implique que $B_1 = \{\ (1,-3,1),(1,1,0)\}$ est une base de E_1.

b)

$$u \in E_2 \Rightarrow u = (c,-2c,c) = c\ (1,-2,1)$$

alors $B_2 = \{\ (1,-2,1)\}$ engendre E_2. mais:

$$\alpha(1,-2,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = 0$$

Ce qui implique que $B_2 = \{\ (1,-2,1)\}$ est une base de E_2.

(3) (1 point) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

$$\dim E_1 = 2 \quad \text{et} \quad \dim E_2 = 1.$$

(4) (1.5 point) Montrer que: $\mathbb{R}^3 = E_1 + E_2$.

a)" $\supset$" $\quad E_1 \subset \mathbb{R}^3$ et $\quad E_2 \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow E_1 + E_2 \subset \mathbb{R}^3$.

b) "$\subset$" soit $u \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow u = (x,y,z) = (a+b, b-3a, a) + (c,-2c,c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a+b+c \\ y = b-3a-2c \\ z = a+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = x - z \\ y = x - z - a - 2z \Rightarrow a = -y + x - 3z \\ c = z - a = z - (-y + x - 3z) = -x + y + 4z \end{cases}$$

$$\Rightarrow u = (x,y,z) = (2x - y - 4z, -2x + 3y - 8z, -y + x - 3z) +$$

$$(-x + y + 4z, -2(-x + y + 4z), -x + y + 4z)$$

$$\in E_1 + E_2 \text{ d'où: } \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2.$$

(5) On déduire que: $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

(a) (0.5)

$$\begin{aligned}\dim E_1 &= 2 \quad \text{et} \quad \dim E_2 = 1\\ &\Rightarrow \dim E_1 + \dim E_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3\\ \text{ou bien on a} &: \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2..\end{aligned}$$

point) sur l'intersection:

$$\begin{aligned}E_1 \cap E_2 &= \{(0,0,0)\} \text{ car: } \{(0,0,0)\} \subset E_1 \cap E_2\\ &\text{car } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont deux sous espaces vectoriels.}\\ \text{De plus si:} \quad & u \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow u = (a+b, b-3a, a) \text{ et } u = (c, -2c, c)\\ &\Rightarrow \begin{cases} a+b=c \\ b-3a=-2c \\ a=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=0 \\ c=0 \end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^3 = E_1 + E_2 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\} \end{cases} \text{ou bien} \begin{cases} \dim E_1 + \dim E_2 = \dim \mathbb{R}^3 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\} \end{cases}\\ &\text{la somme est directe } \left(\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2\right).\end{aligned}$$

Exercice 03:

(1) (2 points)

$$\begin{aligned}I_1 &= \int \sin^2 3x \ \ \mathrm{d}x \ \text{ on pose: } y = 3x \Rightarrow \mathrm{d}y = 3\mathrm{d}x\\ &\Rightarrow I_1 = \frac{1}{3}\int \sin^2 y \ \ \mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{2}(1-\cos 2y)\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{6}\int (1-\cos 2y) \ \ \mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{6}\int \mathrm{d}y - \frac{1}{6}\int \cos 2y \ \mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{6}y - \frac{1}{12}\sin 2y + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c\end{aligned}$$

(2) (2 points)

$$\begin{aligned} 2)\ I_2 &= \int \frac{x+3}{x^2-x+5}\ \mathrm{d}x. \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2-x+5}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1+7}{x^2-x+5}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+5}\ \mathrm{d}x\ + \frac{7}{2}\int \frac{1}{x^2-x+5}\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

mais:

$$\begin{aligned} k &= \int \frac{1}{x^2-x+5}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+5}\ \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{19}{4}}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{19}\int \frac{1}{\frac{4}{19}\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2+1}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{19}\int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{19}}\right)^2+1}\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

on pose :$\frac{2x-1}{\sqrt{19}} = y \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{19}}{2}\mathrm{d}y$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad k = \frac{4}{19}\cdot\frac{\sqrt{19}}{2}&\int \frac{1}{y^2+1}\ \mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{\sqrt{19}}\arctan y + c_1 \\ &= \frac{2}{\sqrt{19}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{19}}\right) + c_1 \end{aligned}$$

conclusion:

$$I_2 = \frac{1}{2}\log\left(x^2-x+5\right)\ +\ \frac{7}{\sqrt{19}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{19}}\right) + c, , c \in \mathbb{R}$$

(3) (2points)

$$\begin{aligned}
3)\ \ I_3 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x-\cos x} \text{ en utilisant le changement de variable: } x=2\arctan z \\
\text{on pose} &: x=2\arctan z \Rightarrow z=\tan\frac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{2}{1+z^2}\ \mathrm{d}z \\
\sin x &= \frac{2z}{1+z^2} \text{ et } \cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}. \\
&\Rightarrow I_3 = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}-\frac{1-z^2}{1+z^2}}\mathrm{d}z \ = 2\int \frac{1}{2z+2z^2}\mathrm{d}z \\
&= \int \frac{1}{z\,(1+z)}\mathrm{d}z = \int \frac{1}{z}\mathrm{d}z - \int \frac{1}{(1+z)}\mathrm{d}z \\
&= \ln|z| - \ln|1+z| + c = \ln\left|\frac{z}{1+z}\right| + c = \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right| + c
\end{aligned}$$

(4) (2 points)

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int \cos 2x \ \ e^{3x}\mathrm{d}x \\
\text{Par parties on pose} &: f\ (x)=\cos 2x \text{ et } g\ '(x)=e^{3x} \\
&\Rightarrow f\ \ '(x) = -2\sin 2x\ \mathrm{d}x \text{ et } g\ \ (x)=\frac{1}{3}e^{3x} \\
&\Rightarrow I_4 = f\ \ (x)\,g\ \ (x) - \int f\ \ '(x)\cdot g\ \ (x)\,\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow I_4 = \frac{1}{3}\cos 2x\ \ \cdot e^{3x} + \frac{2}{3}\int \sin 2x\ \ \cdot e^{3x}\mathrm{d}x \\
\text{Une autre fois par parties on pose} &: h\,(x)=\sin 2x \text{ et } k\ '(x)=e^{3x} \\
&\Rightarrow h\ '(x)=2\cos 2x\ \mathrm{d}x \ \text{ et } \ k\ \ (x)=\frac{1}{3}e^{3x}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_4 = \tfrac{1}{3}\cos 2x\ \cdot e^{3x} + \tfrac{2}{3}\left[h\,(x)\cdot k\ \ (x) - \int h\ '(x)\cdot k\ \ (x)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow I_4 = \tfrac{1}{3}\cos 2x\ \cdot e^{3x} + \tfrac{2}{3}\left[\tfrac{1}{3}\sin 2x\cdot e^{3x} - \tfrac{2}{3}\int \cos 2x\cdot e^{3x}\mathrm{d}x\right] \\
&\Rightarrow I_4 = \tfrac{1}{3}\cos 2x\ \cdot e^{3x} + \tfrac{2}{9}\sin 2x\cdot e^{3x} - \tfrac{4}{9}I_4 \\
&\Rightarrow I_4 = \tfrac{9}{13}\left[\tfrac{1}{3}\cos 2x\ \ \cdot e^{3x} + \tfrac{2}{9}\sin 2x\cdot e^{3x}\right] + c
\end{aligned}$$

Faculté des sciences	**Le: 13 - 09- 2009.**
Commun LMD ST-SM	**Examen de Rattrapage**
Module: MATH 2	**Durée: 1h.30**

Exercice 01: **(1)** Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction:

$$f\ (x) = \ln(1+x).$$

(2) La même question pour la fonction:

$$g\ (x) = \ln(\cos x\ ).$$

(3) Déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction:

$$k\ (x) = e^{\ \ln(\cos x\ )}.$$

Exercice 02: Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 5} \mathrm{dx} \qquad \text{et} \quad I_2 = .\int \frac{1}{3 + \cos x} \mathrm{dx}$$

Exercice 03: Résoudre l'équation suivante:

$$y\ ' - \ y = e^x \ \arctan x\ .$$

Exercice 04: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \quad &\mapsto \quad f\ (x, y, z) = (2x - y + z, 3x - y - z, 4x + y + z) \end{aligned}$$

(1) Trouver la matrice M associée à f relativement à la base canonique B de $\mathbb{R}^3$.

(2) Soit $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2,-1,-2)$, $u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (3,1,2)$.

a) Trouver la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base B_1.

b) Si V est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

c) Trouver la matrice N associée à f relativement à la base B_1.

Barème: EX1: 4 pts EX2: 4 pts EX3: 4 pts EX4: 8 pts.

Université de Tlemcen **Année Universitaire : 2008-2009**

Faculté des sciences **MATH 2**

Tronc Commun LMD ST-SM

Rattrapage (Le corrigé)

Exercice 01: **(1) (1 point)**

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right) \\ \text{avec} o\left(x^3\right) &\rightarrow 0 \text{ qd } x \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(2) (0.5pt +1pt)

$$\begin{aligned} \text{on a} \quad : \quad & \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \\ \Rightarrow \quad & \ln(\cos x) = -\frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

(3) (0.5pt + 1pt)

$$\begin{aligned} \text{on a} \quad &: \quad e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o\left(x^3\right) \\ &\Rightarrow \quad k\ (x) = e^{\ln(\cos x\ )} \\ &= \quad 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \end{aligned}$$

Exercice 02:

(1) (2 points)

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{x^2 - 2x + 5}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2 - 2x + 1 + 4}\ \mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{(x-1)^2 + 4}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\frac{1}{4}(x-1)^2 + 1}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

on pose : $\frac{x-1}{2} = y \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\mathrm{d}y$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad k = \frac{2}{4} \int \frac{1}{y^2 + 1}\ \mathrm{d}y \\ &= \quad \frac{1}{2} \arctan y + c_1 \\ &= \quad \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) + c_1, c_1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

(2) (2 points)

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int \frac{1}{3+\cos x}\,\mathrm{d}x \\
\text{on pose} &: \quad x = 2\arctan z \Rightarrow z = \tan\frac{x}{2} \\
&\Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{2}{1+z^2}\,\mathrm{d}z \text{ et } \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \\
&\Rightarrow L = \int \frac{\frac{2}{1+z^2}}{3-\frac{1-z^2}{1+z^2}}\,\mathrm{d}z \\
&= \int \frac{2}{3\left(1+z^2\right)-1+z^2}\,\mathrm{d}z \\
&= \int \frac{2}{4z^2+2}\,\mathrm{d}z = \int \frac{1}{\left(\sqrt{2}z\right)^2+1}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}z\right)+c, c\in\mathbb{R} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan\frac{x}{2}\right)+c, c\in\mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Exercice 03:

1) $y' - y = e^x \arctan x$. c'est une équation linéaire du premier ordre.

$1^{ére}$- étape: La solution de l'équation sans seconde membre. (1point)

$$
\begin{aligned}
y' - y &= 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = \mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \ln|y| = x + c, c\in\mathbb{R} \\
y_1 &= k\ e^x, k\in\mathbb{R} \text{ solution de l'équation sans seconde membre.}
\end{aligned}
$$

$2^{ème}$- étape: La solution de l'équation avec seconde membre. (3points)

$$y' - y = e^x \arctan x. \ (1)$$

par la méthode de la variation de la constante:

$$\begin{aligned}
y_2 &= k(x)\ e^x \text{ est une solution particulière de } (1)\,.\\
&\Rightarrow y_2' - y_2 = e^x \arctan x\\
&\Rightarrow k\,'(x)\ e^x + k(x)\ e^x \text{ -} k(x)\ e^x = e^x \arctan x\\
&\Rightarrow k\,'(x) = \arctan x \Rightarrow \int k\,'(x)\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

par partie on pose:

$$\begin{aligned}
f\ (x) &= \arctan x \rightarrow f\ \ '(x) = \frac{1}{1+x^2}\\
g\,'(x) &= 1 \rightarrow g\ \ (x) = x\\
&\Rightarrow k(x) = x\ \ \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&\Rightarrow k(x) = x\ \ \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R}\\
&\Rightarrow y_2 = \left[x\ \ \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \lambda\right]\ e^x\ \ , \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

conclusion: la solution générale est définie par:

$$y = \left[x\ \ \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \alpha\right]\ e^x\ \ , \alpha \in \mathbb{R}.$$

Exercice 04: On considère l'application linéaire définie par:

$$\begin{aligned}
f \quad &: \quad \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3\\
(x, y) \quad &\mapsto \quad f\ \ (x, y, z) = (2x - y + z, 3x - y - z, 4x + y + z)
\end{aligned}$$

Soient $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(1)(1.5point) Donner la matrice M associée à f relativement à la base B.

$$f\ (e_1) = (2,3,4)\,, f\ (e_2) = (-1,-1,1)\,, f\ (e_3) = (1,-1,1)$$

$$\Rightarrow \quad M = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f\ (e_1) & f\ (e_2) & f\ (e_3) \end{array} & \end{array}$$

(2) Soient $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ une base de $\mathbb{R}^3$ avec $u_1 = (2,-1,-2)\,,\ u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (3,1,2)\,.$

a)(1point) Trouver la matrice de passage P de la base B à la base B_1.

$$P = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} & \end{array}$$

b)(3.5points) Si V est de composante $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base B, déterminer alors les composantes de V dans la base B_1.

$$V_{B_1} = P^{-1}\ V_B$$

calculons alors la matrice inverse de P :

$$\det P = 2\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0+7+7=14$$

$$\text{la comatrice} \quad : \quad com\ P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 10 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow^t (com\ P) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & 10 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P^{-1} = \frac{1}{\det P}{}^t(com\ P) \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & \frac{10}{14} & -\frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

$$V_{B_1} = P^{-1}\, V_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & \frac{10}{14} & -\frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{14} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{14} \\ -\frac{25}{14} \\ \frac{4}{14} \end{pmatrix}$$

c)(2points) Trouver la matrice N associée à f relativement à la base B_1.

$$N = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & \frac{10}{14} & -\frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{14} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{14} & -\frac{5}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & \frac{10}{14} & -\frac{5}{14} \\ \frac{1}{14} & 0 & \frac{1}{14} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 9 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{37}{14} & -\frac{16}{14} & -\frac{8}{14} \\ \frac{65}{14} & \frac{25}{14} & -\frac{15}{14} \\ \frac{8}{14} & \frac{4}{14} & \frac{22}{14} \end{pmatrix}$$

Université de Tlemcen **Année Universitaire:2009-2010**

Faculté des sciences **Le: 26 - 09- 2010.**

Commun LMD ST-SM **Examen de Rattrapage**

Module: MATH 2 **Durée: 1h.30**

Exercice 01: Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(3a+b, b-a, a) \in \mathbb{R}^3 /\ a, b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{ et } E_2 = \left\{(c, -2c, 5c) \in \mathbb{R}^3 /\ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

avec E_2 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(1) Montrer que E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

(3) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

(4) Déduire si la somme est directe ou non.

Exercice 02: Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 - 4x + 7} \mathrm{dx} \ , \ I_2 = . \int \cos^4 x \ \mathrm{dx} \quad \text{et} \quad I_3 = . \int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} \mathrm{dx}$$

Exercice 03: 1) Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse:

$$\begin{aligned}
\textbf{(1pt)}\ 1)\ A^2 &= A \Rightarrow A = I \text{ ou } A = 0 \\
\textbf{(1pt)} \quad 2)\ A \text{ diagonale} &\Rightarrow A \cdot B = B \cdot A \\
\textbf{(1pt)}\ 3)\ A \cdot B &= B \cdot A \text{ et } A^{-1} \text{ existe} \Rightarrow A^{-1} \cdot B = B \cdot A^{-1}
\end{aligned}$$

2)(2pts) Calculer l'inverse de la matrice:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 03: Résoudre les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
(1) \quad y' + 2y &= e^{-2x} \ \arctan x \ . \\
(2)\ y'' + 2y' + y &= \left(x^2 + 1\right) . \cos x
\end{aligned}$$

Barème: EX1: 4 pts **EX2: 5 pts** **EX3: 5 pts** **EX4: 6 pts.**

Université de Tlemcen **Année Universitaire:2009-2010**

Faculté des sciences **Le: 26 - 09- 2010.**

Commun LMD ST-SM **Examen de Rattrapage (Le corrigé)**

Module: MATH 2 **Durée: 1h.30**

Exercice 01: Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les sous ensembles suivants:

$$E_1 = \left\{(3a+b, b-a, a) \in \mathbb{R}^3 / \ a, b \in \mathbb{R}\right\} \quad \text{et } E_2 = \left\{(c, -2c, 5c) \in \mathbb{R}^3 / \ c \in \mathbb{R}\right\}.$$

avec E_2 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(1)(1 point) Montrons que E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$?.

a) $E_1 \neq \emptyset$?

$(0,0,0) \in E_1 \Rightarrow E_1 \neq \emptyset$

b) $\forall \ u_1, u_2 \in E_1 \Rightarrow u_1 + u_2 \in E_1$?

Soient $u_1, u_2 \in E_1 \Rightarrow u_1 = (3a_1 + b_1, b_1 - a_1, a_1)$ et $u_2 = (3a_2 + b_2, b_2 - a_2, a_2)$

$\Rightarrow u_1 + u_2 = (3(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), (b_1 + b_2) - (a_1 + a_2), (a_1 + a_2)) \in E_1$

c) $\forall \ u \in E_1, \forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha u \in E_1$?

Soient $u \in E_1$ et $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow u = (3a + b, b - a, a)$

$\Rightarrow \alpha u = (3\alpha a + \alpha b, \alpha b - \alpha a, \alpha a) \in E_1$

Conclusion: E_1 est un s-ev de $\mathbb{R}^3$.

(2) (1 points) Déterminons une base B_1 de E_1 et une base B_2 de E_2.

a)

$$u \in E_1 \Rightarrow u = (3a + b, b - a, a) = a \ (3, -1, 1) + b \ (1, 1, 0)$$

alors $B_1 = \{(3,-1,1),(1,1,0)\ \}$ engendre E_1. mais:

$$\alpha(3,-1,1) + \beta(1,1,0) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

alors les deux vecteurs de B_1 sont linéairement indépendants.

Ce qui implique que $B_1 = \{\ (3,-1,1),(1,1,0)\}$ est une base de E_1.

b)

$$u \in E_2 \Rightarrow u = (c,-2c,5c) = c\ \ (1,-2,5)$$

alors $B_2 = \{\ (1,-2,5)\}$ engendre E_2. mais:

$$\alpha(1,-2,5) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = 0$$

Ce qui implique que $B_2 = \{\ (1,-2,5)\}$ est une base de E_2.

(3) (1 point) En déduire $\dim E_1$ et $\dim E_2$.

$$\dim E_1 = 2 \quad \text{et} \qquad \dim E_2 = 1.$$

(4) (1pt) On déduire que: $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

(a)

$$\begin{aligned} \dim E_1 &= 2 \quad \text{et} \qquad \dim E_2 = 1 \\ &\Rightarrow \dim E_1 + \dim E_2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 = 3 \end{aligned}$$

(b) :

$$
\begin{aligned}
E_1 \cap E_2 &= \{(0,0,0)\} \text{ car: } \{(0,0,0)\} \subset E_1 \cap E_2 \\
&\quad \text{car } E_1 \text{ et } E_2 \text{ sont deux sous espaces vectoriels.} \\
\text{De plus si:} \quad & u \in E_1 \cap E_2 \Rightarrow u = (3a+b, b-a, a) \text{ et } u = (c, -2c, 5c) \\
&\Rightarrow \begin{cases} 3a+b=c \\ b-a=-2c \\ a=5c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ a=0 \\ c=0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} \dim E_1 + \dim E_2 = \dim \mathbb{R}^3 \\ E_1 \cap E_2 = \{(0,0,0)\} \end{cases} \\
&\quad \text{la somme est directe } \left(\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2\right).
\end{aligned}
$$

Exercice 02: Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$$
I_1 = \int \frac{1}{x^2-4x+7}\mathrm{dx} \;\;, I_2 = .\int \cos^4 x \;\mathrm{dx} \quad \text{et} \quad I_3 = .\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\mathrm{dx}
$$

1) **(1.5 pt)**$I_1 = \int \frac{1}{x^2-4x+7}\mathrm{dx} = \int \frac{1}{(x-2)^2+3}\mathrm{dx} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{dx} =$

on pose : $\frac{x-2}{\sqrt{3}} = y \Rightarrow \mathrm{d}x = \sqrt{3}\mathrm{d}y$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad I_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{y^2+1}\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan y + c_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x-2}{\sqrt{3}}\right) + c_1
\end{aligned}
$$

(2) (2 points)

$$\begin{aligned}
I &= \int \cos^4 x \ \ \mathrm{d}x \ \ = \int \left(\cos^2 x \ \ \right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int \left(\frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right)\right)^{\ 2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right) \ \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \ \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \ \ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

mais:

$$\begin{aligned}
\text{si on pose } t &= 2x \text{ dans:} \int \cos^2 2x \ \ \mathrm{d}x \\
&\Rightarrow \int \cos^2 2x \ \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos^2 t \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\left(1+\cos 2t\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}t + \frac{1}{8}\sin 2t + c_1 \\
&= \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + c_1
\end{aligned}$$

alors:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + c, c \in \mathbb{R} \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c, c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

(3) (1.5 point)

$$\begin{aligned}
I_3 &= .\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x} dx \\
\text{Si on pose} &: \quad I_4 = .\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x} \mathrm{dx} \\
\text{alors} &: \quad \left\{ \begin{array}{c} I_3 + I_4 = x \\ I_4 - I_3 = \ln\left(\sin x+\cos x\right) \end{array} \right. \\
&\Rightarrow \quad I_3 = \frac{1}{2}\left[x - \ln\left(\sin x+\cos x\right)\right].
\end{aligned}$$

Exercice 03: Répondre par vrai ou faux et justifier votre réponse:

$$1)\ A^2 = A \Rightarrow A = I \text{ ou } A = 0 \quad \textbf{(1pt)}$$

C'est faux car pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a:$A^2 = A$ mais$A \neq I$ et $A \neq 0$

$$2)\quad A \text{ diagonale} \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A \quad \textbf{(1 pt)}$$

C'est faux car si: $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} -a & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B \cdot A = \begin{pmatrix} -a & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A \text{ avec } A \text{ est une matrice diagonale.} \end{aligned}$$

$$3)\ A \cdot B = B \cdot A \text{ et } A^{-1} \text{ existe} \Rightarrow A^{-1} \cdot B = B \cdot A^{-1} \quad \textbf{(1pt)}$$

Si $A \cdot B = B \cdot A$ et A^{-1} existe$\Rightarrow A^{-1} \cdot B = A^{-1} \cdot B \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A \cdot B \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$ cqfd.

2)(2pts) Calculer l'inverse de la matrice:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det X = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 60$$

$$X^{-1} = \frac{1}{\det X}\, {}^{t}comX$$

$$comX = \begin{pmatrix} -1 & 14 & 33 \\ -9 & 6 & 1 \\ 13 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X^{-1} = \frac{1}{60}\begin{pmatrix} -1 & -9 & 13 \\ 14 & 6 & -2 \\ 33 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 03: Résoudre les équations suivantes:

$$\begin{aligned} (1) \quad y\,' + 2\,y &= e^{-2x} \ \arctan x\ . \\ (2)\ y\,'' + 2y\,' + y &= \cos x \end{aligned}$$

(1)

$$y\,' + 2\,y = e^{-2x}\ \arctan x\ .$$

1^{ére}- étape: La solution de l'équation sans seconde membre. (1point)

$$\begin{aligned} y' + 2y &= 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2y \\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{y} = -2\mathrm{d}x \Rightarrow \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int 2\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow \ln|y| = -2x + c, c \in \mathbb{R} \\ y_1 &= k\ \cdot e^{-2x}, k \in \mathbb{R} \text{ solution de l'équation sans seconde membre.} \end{aligned}$$

2ème- étape: La solution de l'équation avec seconde membre. (1.75point)

$$y\,' + 2\,y = e^{-2x}\ \arctan x\ .\ (1)$$

par la méthode de la variation de la constante:

$$\begin{aligned}
y_2 &= k(x)\cdot e^{-2x} \text{ est une solution particulière de } (1)\,. \\
&\Rightarrow\ y_2' - -2y_2 = e^{-2x}\ \arctan x \\
&\Rightarrow\ k'(x)\cdot e^{-2x} \text{ -}2k(x)\ e^{-2x}\ +2k(x)\ e^{-2x} = e^{-2x}\ \arctan x \\
&\Rightarrow\ k'(x) = \arctan x \Rightarrow \int k'(x)\,\mathrm{d}x = \int \arctan \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

par partie on pose:

$$\begin{aligned}
f\ (x) &= \arctan x \to f\ '(x) = \frac{1}{1+x^2} \\
g'(x) &= 1 \to g\ (x) = x \\
&\Rightarrow\ k(x) = x\ \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&\Rightarrow\ k(x) = x\ \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow\ y_2 = \left[x\ \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \lambda\right]\cdot e^{-2x}\ , \lambda \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

conclusion (0.25 pt): la solution générale est définie par:

$$y = \left[x\ \arctan x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \alpha\right]\cdot e^{-2x}\ , \alpha \in \mathbb{R}.$$

(2)

$$y'' + 2y' + y = \cos x\ .\ \ (3)$$

1^{ére}- étape: La solution de l'équation sans seconde membre. (1point)

$$\begin{aligned}
y'' + 2\,y' +\ y &= 0 \quad (4) \\
\text{l'équation caractéristique est donnée par} &: \ r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow \triangle = 0 \\
&\Rightarrow\ r_0 = -1 \text{ est une racine double} \\
\text{d'où la solution de } (4) \text{ est définie par} &:
\end{aligned}$$

$$y_1 = (c_1 + c_2x)\,e^{-x}, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$2^{ème}$- étape: La solution de l'équation avec seconde membre. (1.75point)

la méthode de la solution particulière:

$$\begin{aligned} y_2 &= (a\cos x + b\sin x)\,, \quad \text{est une solution de } (3) \\ &\Rightarrow \; {y_2}'' + 2\;{y_2}' + \; y_2 = \cos x \\ &\Rightarrow \; (-a + 2b + a)\cos x + (b - 2a + b)\sin x = \cos x \\ &\Rightarrow \; b = \frac{1}{2}, a = 0 \\ &\Rightarrow \; y_2 = \frac{1}{2}\sin x \end{aligned}$$

Conclusion: (0.25) la solution générale est définie par:

$$y = y_1 + y_2\ .$$

Université de Tlemcen **Année Universitaire:2009-2010**

Faculté des sciences **Le: 23 - 09- 2010**

Commun LMD ST-SM **Examen de Rattrapage**

Module: MATH 1 **Durée: 1h 30**

Exercice 01: soit S la relation dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$a\ S\ b\ \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b$$

(1) (1.5pt) Montrer que S est une relation d'équivalence.

(2) (2.5pts) Discuter suivant la valeur de m le nombre d'éléments contenus dans la classe de m .

Exercice 02: Soit la fonction :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f\ (x) = \begin{cases} x^2\ \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

(1) (1.5pt) Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(2) (1.5 pt) Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

(3) (1.5pt) f est-elle de classe C^1?

Exercice 03:

(1) (2pts) Montrer que: si $n \in \mathbb{N}^*, 2^n - 1$ est un nombre premier alors n est premier.

(2) Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction définie par: $g(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

a) (1.5 pt) L'équation $g(x) = 0$ admet-elle une solution?

b) (1.5 pt) Cette solution est-elle unique? justifier votre réponse.

Exercice 04: Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \frac{4U_n + 2}{U_n + 5}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) (1.5 pt) Pour quelles valeurs de$a$ la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle constante ?

(2) (1.5 pt) Montrer que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $U_{n_0} = -2$, alors $U_{n_0 - 1} = -2$.

(3) (1.5 pt) En déduire que si $U_0 \neq -2$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq -2$.

(4) (2pts) On suppose que $U_0 \neq -2$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$.

Vérifier que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique.

EX1:4 pts EX2: 4.5 pts EX3: 5pts EX4: 6.5 pts.

Examen de Rattrapage (solution)

Exercice 01: soit S la relation dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$a \; S \; b \Leftrightarrow a^3 - b^3 = a - b$$

(1) Montrons que S est une relation d'équivalence.

a) S **est-elle réflexive? (0.5pt)**

S est réflexive$\Leftrightarrow$ $\forall a \in \mathbb{R}, \quad a \ \ S \ a.$

$$\forall a \in \mathbb{R}, \Rightarrow a^3 - a^3 = a - a = 0 \Rightarrow a \ Sa \Rightarrow S \text{ est réflexive}$$

1. **b)** S **est-elle symétrique? (0.5pt)**

S est symétrique$\Leftrightarrow$ $\forall (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad a \ \ \Re \ b \Rightarrow b \ \Re \ a.$

$$\begin{aligned} \forall (a,b) \quad &\in \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \qquad a \ \Re b \Rightarrow a^3 - b^3 = a - b \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad b^3 - a^3 = b - a \Rightarrow b \ Sa \Rightarrow S \text{ est symétrique.} \end{aligned}$$

1. **c)** S **est-elle transitive? (0.5pt)**

S est transitive$\Leftrightarrow$ $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, aSb$ et $bSc \Rightarrow$ $a \ Sc.$

$$\begin{aligned} \forall (a,b,c) \quad &\in \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ a \ \Re b \quad &\Rightarrow \quad \forall a \in \mathbb{R}, \Rightarrow a^3 - b^3 = a - b \\ \text{et } bSc \quad &\Rightarrow \quad \forall a \in \mathbb{R}, \Rightarrow b^3 - c^3 = b - c \\ &\Rightarrow \quad a^3 - c^3 = a - c \Rightarrow a \ Sc \Rightarrow S \text{ est transitive} \end{aligned}$$

1. **(2)** Discuter suivant la valeur de m le nombre d'éléments contenus dans la classe de m .

   $cl \ (m)$ $=\{a \in \mathbb{R} / \ mSa\}$**(0.25 pt)**

   $mSa \Leftrightarrow \quad m^3 - a^3 = m - a$ **(0.25 pt)**

   $\Rightarrow \ (m-a) \ (m^2 + am + a^2) = (m-a)$

   $\Rightarrow \ (a-m) \ (a^2 + ma + m^2) = (a-m) \Rightarrow$

   $$\begin{cases} a = m \\ \text{ou } a^2 + ma + m^2 = 1 \Rightarrow a^2 + ma + m^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

   conclusion:(2 pts) pour $\triangle = m^2 - 4\left(m^2 - 1\right)$

   $= 4 - 3m^2 = \left(2 - \sqrt{3}m\right) \quad \left(2 + \sqrt{3}m\right)$

   1/ Si $\triangle = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ou $m = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ alors on a deux éléments dans la classe de m.

2/ Si $\triangle < 0 \Rightarrow m \in \left]-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[$ alors on a un élément unique dans la classe de m.

3/ Si $\triangle > 0 \Rightarrow m \in \left]-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right[\cup \left]\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$ alors on a 3 éléments dans la classe de m.

Exercice 02: Soit la fonction :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f\ (x) = \begin{cases} x^2\ \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

(1) Etudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

f est continue et dérivable dans $\mathbb{R}^*$car f est bien définie. **(0.5)**

f est continue en 0 ssi:

$$\lim_{x\to 0} f\ (x) = f\ (0) \quad \textbf{(0.5)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f\ (x) &= \lim_{x\to 0} x^2\ \sin\frac{1}{x} \\ &= 0 \text{ car } \lim_{x\to 0} x^2 = 0 \text{ et } \sin\frac{1}{x} \text{ est bornée. } \textbf{(0.5)} \\ &= f\ (0) \end{aligned}$$

(2) (1.5 pt) Etudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable dans $\mathbb{R}^*$

pour $x = 0$ on a:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f\ (x) - f\ (0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x\ \sin\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \text{ f est dérivable en 0.}$$

(3) (1.5pt) f est-elle de classe $C^{\ 1}$?

$$\begin{aligned} f^{\ \prime}(x) &= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} \\ &\Rightarrow \lim_{x\to 0} f^{\ \prime}(x) \text{ n'existe pas} \\ &\Rightarrow f \text{ n'est pas de classe } C^1. \end{aligned}$$

Exercice 03:

(1) **(2 pts)** Montrons que: si $n \in \mathbb{N}^*, 2^n - 1$ est un nombre premier alors n est premier.

par l'absurde supposons que n n'est pas premier

$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{N}$ avec $a \neq 1$ et $a \neq n$ et $n = a.b$

$\Rightarrow 2^n - 1 = 2^{(a.b)} - 1 = (2^a)^b - 1$

$= (2^a - 1) . \left((2^a)^{b-1} + ... + 1\right) = X.Y$ avec $X \neq 1$ car $a \neq 1$

et $X \neq 2^n - 1$ car $a \neq n \Rightarrow 2^n - 1$ n'est pas premier.

(2) Soit $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par: $g\ (x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

a) L'équation $g\ (x) = 0$ admet-elle une solution?

La fonction $g\ (x)$ est continue dans$]0, +\infty[$ **(0.5 pt)**

$$\lim_{x \to 0} g\,(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \to +\infty} g\,(x) = -\infty$$
$$\left(\lim_{x \to 0} g\,(x) . \lim_{x \to +\infty} g\,(x) < 0\right) \textbf{(0.5 pt)}$$

d'après le théorème des valeurs intermédiares $\exists x_0 \in]0, +\infty[/\ \ g\ (x_0) = 0$ **(0.5 pt)**

b) (1.5 pt) Cette solution est-elle unique? justifier votre réponse.

$g'\,(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow g$ est strictement décroissante$\Rightarrow$ la solution est unique.

Exercice 04: Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ une suite définie par:

$$\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \frac{4U_n\ +\ 2}{U_n\ +\ 5}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(1) (1.5 pt) Pour quelles valeurs de$a$ la suite $(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ est-elle constante ?

$(U_n)_{n\,\in\,\mathbb{N}}$ est une suite constante$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n = a$

$$\Leftrightarrow \frac{4a\ \ +\ 2}{a + 5} = a \Leftrightarrow a = 1 \text{ ou } a = -2$$

(2) (1.5 pt) Montrer que s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $U_{n_0} = -2$, alors $U_{n_0-1} = -2$.

Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $U_{n_0} = -2$, alors $U_{n_0} = \frac{4U_{n_0-1}+2}{U_{n_0-1}+5} = -2$

$\Rightarrow U_{n_0-1} = -2.$

(3) (1.5 pt) En déduire que si $U_0 \neq -2$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq -2.$

par l'absurde supposons $\exists n \in \mathbb{N}, U_n = -2 \Rightarrow U_{n-1} = -2 \Rightarrow ... \Rightarrow U_0 = -2$ (d'après (2))

(4) On suppose que $U_0 \neq -2$ et on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$.

Vérifier que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique bien définie.

1) (**1 pt**) $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite qui est définie car d'après (3)

$U_0 \neq -2$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \neq -2.$

2) (**1 pt**)

$$\begin{aligned}
\frac{V_{n+1}}{V_n} &= \frac{\frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+2}}{\frac{U_n-1}{U_n+2}} = \frac{\frac{\frac{4U_n+2}{U_n+5}-1}{\frac{4U_n+2}{U_n+5}+2}}{\frac{U_n-1}{U_n+2}} \\
&= \frac{\frac{3(U_n-1)}{6(U_n+2)}}{\frac{U_n-1}{U_n+2}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

donc c'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

EX1: 4 pts EX2: 4.5 pts EX3: 5pts EX4: 6.5 pts .

Université de Tlemcen **Année Universitaire:2008-2009**

Faculté des sciences **Le: 07 - 05- 2009**

Commun LMD ST-SM **Examen de Rattrapage**

Module: MATH 1 **Durée: 1h 30**

Inscrire le numéro du groupe s.v.p.

****

Exercice 01: **(1) a)** Montrer par récurrence que:$\forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) Sachant que: $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

déduire la somme: $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\ (n-k)$.

(2) Calculer la limite suivante:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$$

(3) Calculer les racines cubiques de: $z = -1 + i\ \sqrt{3}$

Exercice 02: On définit dans $\mathbb{R}$ la relation R par:

$$x\ R\ y \iff x^2 - x = y^2 - y$$

(1) Montrer que R est une relation d'équivalence.

(2) Donner $\dot{0}$ et $\dot{1}$.

(3) Déterminer la classe d'équivalence de $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 03: On considère la suite réelle définie par:

$$U_0 = 2, \qquad U_{n+1} = \frac{1}{3}\ (2U_n + 5) \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

(1) Calculer: $U_1\ , U_2$.

(2) Montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad U_n\ < 5\ .$$

(3) (U_n) est-elle croissante ou décroissante? justifier votre réponse.

(4) En déduire que $(U_n)_{n\ \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 04: Soit $f\ (x) = x - e^{-\ x}$. $\big($on donne $e^{-1} \simeq 0.37\big)$

a) Montrer que l'équation $f\ (x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle$]0, 1[$.

b) Cette solution est-elle unique? justifier votre réponse.

1. **Barème: EX1: 7 pts EX2: 5.5 pts EX3: 4.5pts EX4: 3pts.**

Université de Tlemcen **Année Universitaire:2006-2007**

Faculté des sciences **Le: 03 - 09- 2007**

Tronc Commun LMD ST-SM **Examen de Rattrapage**

Module: MATH 1 **Durée: 2h**

Exercice 01: **(1)** Soient E un ensemble,$A, B \in P(E)$.Résoudre dans $P(E)$ l'équation suivante:

$$X \cap A = B.$$

(2) Soit A_1et A_2 deux parties de E .

a) Montrer que:

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

b) Donner un exemple qui prouve que le sens de l'inclusion est stricte. i.e:

$$f(A_1) \cap f(A_2) \text{ n'est pas inclu dans } f(A_1 \cap A_2).$$

Exercice 02: **(1)** Déterminer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de $\ln x$.

(2) En déduire $\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

(3) Calculer la dérivée de: $h(x) = \arctan \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 03: Soit f :$[a, b] \to [a, b]$ une fonction continue.

(1) En considérant la fonction $g : g(x) = f(x) - x$, montrer que f admet un point fixe. i.e:

$$\exists\, x \in [a, b] : f(x) = x$$

(2) Montrer que le point fixe est unique dans chacun des cas suivants:

a) f est décroissante.

b)

$$\exists k \in [0,1[\,, \forall x,y \in [a,b] : |f\ \ (x) - f\ \ (y)| \leq k\ \ |x-y|$$

Exercice 04: **(1)** Soit $A = \{(x, ax+b)\,;\ x \in \mathbb{R}\}$, a et b sont des paramètres réels.

A est-il un sous-ev de $\mathbb{R}^2$?

1. **(2)** Soient E un K-ev, F et G deux s-ev de E.

$F \cup G$ est -il un s-ev de E ?

Barème: EX1: 5.5 pts EX2: 3 pts EX3: 6 pts EX4: 5.5 pts.

Université de Tlemcen **Année Universitaire:2006-2007**

Faculté des sciences **Le: 15 - 09- 2007**

Tronc Commun LMD ST-SM **Examen de Rattrapage**

Module: MATH 2 **Durée: 2h**

Exercice 01: **(1)** Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$$1)\ \int \arctan\ x\ dx$$

$$2)\ \int \frac{x+1}{x^2-2x+5} dx$$

(2) Calculer les intégrales définies suivantes:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\cos x\ +\ \sin x}\ dx$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x\ +\ \sin x}\ dx$$

Exercice 02:

Calculer l'intégrale $K = \iint e^{x\,+\,y}\;dx\;dy$ sur le carré:

$$D = \{(x, y)\,/\;\; |x| \;+\; |y| \;\leq\; 1\}$$

Exercice 03: Résoudre l'équation suivante:

$$y\,'' - 2\,y\,' + 2\,y \;=\; e^{\,x} \;+\; x$$

(**utiliser la méthode de la solution particulière)**

Exercice 04: Soit $f\;:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par:

$$f\;\;(x, y) = (x + 3y\;, 2x + 2y\;)$$

Considérons les vecteurs de $\mathbb{R}^2$:

$$u_1 = (1, 2)\;\text{ et }\; u_2 = (-1, 3)$$

1) Vérifier que f est linéaire et que $\{u_1,\; u_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

2) Ecrire la matrice associée à f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

3) Trouver la matrice associée à f dans la base $\{u_1,\; u_2\}$.

1. **Barème: EX1: 7 pts EX2: 4 pts EX3: 4 pts EX4: 5 pt**s.